



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Estabilidad exponencial y polinomial de un sistema
Bresse elástico con dos realimentaciones distribuidas
localmente**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Joaquín Omar PÉREZ ORTIZ

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Pérez, J. (2019). *Estabilidad exponencial y polinomial de un sistema Bresse elástico con dos realimentaciones distribuidas localmente*. Tesis para optar grado de Magister en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor:

Ninguno

Código Orcid del asesor:

0000-0001-9944-4020

DNI del autor:

10525884

Grupo de investigación:

No pertenece

Institución que financia parcial o totalmente la investigación:

Autofinanciado

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y coordenadas geográficas:

Lima – Perú

Año o rango de años que la investigación abarco:

Noviembre 2017 – setiembre 2019

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, ^{16:40}..... horas del día jueves veintiséis de setiembre del dos mil diecinueve, en el Aula UPG 1 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Carlos Alberto Peña Miranda e integrado por los siguientes miembros, Dr. George José Baustista Sánchez (Jurado Evaluador), Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre (Jurado Evaluador), Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda (Jurado Informante) y el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ESTABILIDAD EXPONENCIAL Y POLINOMIAL DE UN SISTEMA BRESSE ELÁSTICO CON DOS REALIMENTACIONES DISTRIBUIDAS LOCALMENTE» presentada por el Bachiller Joaquín Omar Pérez Ortiz para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Joaquín Omar Pérez Ortiz respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Joaquín Omar Pérez Ortiz aprobado con el calificativo de ^{Buena}.....
.....¹⁶.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura al Bachiller Joaquín Omar Pérez Ortiz.**

Siendo las ^{17:30}..... horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. George José Bautista Sánchez
Miembro

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Presidente

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda
Miembro

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

DEDICATORIA

A la dedicación de mis padres, Félix y Ángela.

A mis hijos, Joali, Jozué y Angelita.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios que siempre me dio una mano para levantarme cuando he caído y la otra para empujarme a seguir avanzando.

Agradezco a mi asesor el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra a quien respeto y admiro, lo conozco desde estudiante y me apoyo en este largo, pero no imposible camino de la maestría.

Agradezco al profesor Mg. Víctor Tarazona por también apoyarme en las dudas que tenía sobre el presente trabajo de mi tesis.

Agradezco a dos excelentes profesionales que me motivaban para obtener esta tesis como la Mg. Mirtha Días y el Mg. A. Fukusaki.

Agradezco a mis padres y hermana por su paciencia, a mis hijos que son el motivo que después de varios años de culminar mis estudios de maestría obtener el grado.

RESUMEN

Estabilidad Exponencial y Polinomial de un Sistema Bresse Elástico con dos Realimentaciones Distribuidas Localmente

Joaquín Omar Pérez Ortiz

2019

Asesor : Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

Título obtenido : Magister en Matemática

En este trabajo estudiaremos un Sistema de Bresse con dos Realimentaciones Distribuidas Localmente, que se emplean en la mecánica de sólidos deformables. En este trabajo obtendremos la existencia, unicidad de solución y el decaimiento exponencial y polinomial de la energía asociada al Sistema de Bresse Amortiguados por dos realimentaciones localmente distribuidas. Utilizaremos la teoría de semigrupos y del resolvente de un generador infinitesimal para analizar la existencia y unicidad de la solución, además cuando las velocidades de onda sean iguales se demostrará la estabilidad exponencial y si son distintas no será exponencialmente estable, pero será polinomialmente estable.

Palabras clave

Sistema de Bresse, teoría de semigrupos, estabilidad exponencial y estabilidad polinomial.

ABSTRACT

Exponential and Polynomial Stability of an Elastic Bresse System with two Locally Distributed Feedback

Joaquín Omar Pérez Ortiz

2019

Advisor : Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

Qualification obtained : Master in Mathematics

In this work we will study a Bresse System with two Locally Distributed Feedback, which are used in the mechanics of deformable solids. In this work we will obtain the existence, uniqueness of the solution and the exponential and polynomial decay of the energy associated with the Bresse System, damped by two locally distributed feedback. We will use the theory of semigroups and the resolver of an infinitesimal generator to analyze the existence and uniqueness of the solution, also when the wave velocities are equal, the exponential stability will be demonstrated and if they are different, it will not be exponentially stable, but it will be polynomially stable.

Keywords

Bresse system, semigroup theory, exponential stability and polynomial stability.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Preliminares	
2.1 Análisis Funcional y Espacios de Sobolev	4
2.2 Semigrupos	11
2.3 El Problema de Cauchy Abstracto	17
2.4 Estabilidad Exponencial.....	18
2.5 Estabilidad Polinomial	21
3. Existencia y Unicidad	
3.1 La energía del sistema	22
3.2 Existencia y unicidad	24
4. Estabilidad Exponencial.....	36
5. Estabilidad Polinomial.....	46
6. Conclusiones	52
7. Bibliografía	53

CAPITULO 1

Introducción

En los últimos años se tiene un creciente interés a entender las teorías termo mecánicas no clásicas de materiales micromorfos, materiales porosos, etc., que se obtienen al mezclar por ejemplo la introducción de moléculas de gas en materiales no porosos, o en el ensamblaje de iones metálicos o cúmulos y ligantes orgánicos, así se obtienen nuevos materiales con importantes propiedades físicas como conductividad, porosidad y otros. Para varias teorías de mezcla de materiales, se utiliza la descripción espacial y las variables independientes son las gradientes de desplazamiento y la velocidad relativa, y es ampliamente aceptada en la comunidad científica y tiene un amplio campo de aplicaciones como en la mecánica de materiales.

Para su estudio y análisis se emplean el sistema de Navier – Bresse (denominadas también fórmulas vectoriales de Navier-Bresse) que se emplean en la rama de la mecánica de sólidos deformables con el objetivo de describir el comportamiento de las partículas del sólido deformable.

Desde los años 1990, se vienen estudiando problemas con amortiguamiento localmente distribuidas ver [11, 20, 24, 29, 30 y 34], para problemas lineales y no lineales.

Problemas de estabilización exponencial y/o polinomial podemos ver en [2, 3, 4, 5, 6, 15 y 16].

En el presente trabajo de tesis desarrollaremos en forme didáctica y explícita la existencia, unicidad de solución como también el decaimiento exponencial y polinomial de la energía asociada a un Sistema de Bresse (Jacques Antoine Charles Bresse 1822 – 1883, Francia) amortiguados por dos realimentaciones localmente distribuidas, estudiado por Ali Wehbe et al [5], representado por el sistema,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi) = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, +\infty) \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_1(x)\psi_t = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, +\infty) \quad (1.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_2(x)\omega_t = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, +\infty) \quad (1.3)$$

Haciendo uso de las leyes del movimiento rotacional, longitudinal y vertical se deduce el sistema (1.1) – (1.3).

El sistema consiste de 3 ecuaciones de onda acoplados en cierto patrón y amortiguada por dos realimentaciones localmente distribuidos. La ecuación de onda acerca del ángulo de rotación (1.2) y la ecuación de desplazamiento longitudinal (1.3) son efectivamente amortiguadas por los dos realimentaciones localmente distribuidos, la ecuación de onda del desplazamiento vertical (1.1) es solo indirectamente amortiguada.

Las funciones continuas positivas $a_i(x)$, $i = 1, 2$ satisfacen,

$$a_i(x) \geq a > 0, \forall x \in \Theta =]0, c[\cup]d, L[, 0 < c < d < L \quad (1.4)$$

Con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = \omega(t, 0) = \omega(t, L) = 0, & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = \omega_x(t, 0) = \omega_x(t, L) = 0, & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (1.6)$$

Y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \varphi_0(x), & \varphi_t(0, x) = \varphi_1(x), & x \in (0, L) \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & \psi_t(0, x) = \psi_1(x), & x \in (0, L) \\ \omega(0, x) = \omega_0(x), & \omega_t(0, x) = \omega_1(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.7)$$

Estas tienen variable temporal ($t \geq 0$) y espacial ($x \in [0, L]$), además en el sistema (1.1) – (1.3) tenemos que $\rho_1, \rho_2, G, h, l, E$ son constantes positivas, que caracterizan propiedades físicas de la viga y el filamento, por ω , φ y ψ estamos denotando, respectivamente, el desplazamiento longitudinal, desplazamiento vertical y ángulo de rotación, las funciones $a_i(x)$, $i = 1, 2$ son funciones positivas y los términos $a_1(x)\psi_t$ y $a_2(x)\omega_t$, son términos disipativos locales.

1.1 Formulación del Problema

El Sistema de Bresse es un caso más general que el Sistema de Timoshenko (considerando en sistema $l = 0$), esto es, no considerando el desplazamiento longitudinal ω .

Las velocidades de propagación de las ondas son dadas, respectivamente por

$$v_1 = \frac{Gh}{\rho_1}, v_2 = \frac{EI}{\rho_2}, v_3 = \frac{Eh}{\rho_1}$$

Existen varias publicaciones sobre la estabilización del sistema de Timoshenko con diferentes tipos de amortiguación (véanse la Ref. [26]). En particular, en el caso en el que solo la ecuación de onda alrededor del ángulo de rotación es amortiguada eficazmente por una fuerza de realimentación localmente distribuida en la vecindad de la frontera. Entonces la ecuación de onda sobre el desplazamiento transversal solo se amortigua indirectamente a través del acoplamiento. La eficacia de este amortiguamiento depende del tipo de acoplamiento y de las velocidades v_1 y v_2 .

Además, en la Ref. [39], Soufyane et al, demostraron que la energía $E(t)$ del sistema de Timoshenko (sin considerar φ) sometida a la condición de frontera de Dirichlet correspondiente, tenía una tasa de decaimiento exponencial cuando $v_1 = v_2$ y la tasa de decaimiento no exponencial cuando $v_1 \neq v_2$. Haciendo uso de las leyes del movimiento rotacional, longitudinal y vertical se deduce el sistema (1.1) – (1.3).

1.2 Justificación de la Investigación.

Otros autores han analizado variantes del sistema (1.1) – (1.3). Cuando $v_1 \neq v_2$ métodos dados por Soufyane et Al [39] no funciona, este fenómeno se ha observado para la evolución de segundo orden parcialmente amortiguada.

En Ref. [22] Liu et al, consideraron un sistema Bresse Termoelástico que consiste en tres ecuaciones de onda y dos ecuaciones de calor acopladas en cierto patrón. Las dos ecuaciones de onda sobre el desplazamiento longitudinal y el desplazamiento del ángulo de corte son efectivamente amortiguadas globalmente por la disipación de las dos ecuaciones de calor. La ecuación de onda sobre el desplazamiento vertical está sujeta a un amortiguamiento térmico débil y amortiguado indirectamente a través del acoplamiento. Establecen la tasa de decaimiento de energía exponencial cuando la onda vertical y longitudinal tiene la misma velocidad de propagación. De lo contrario, se produce un decaimiento del tipo polinomial.

1.3 Objetivos de la investigación.

1.3.1 Objetivo General.

Nuestro principal objetivo es obtener la estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema (1.1) – (1.3) con 2 amortiguamiento localizado; siguiendo los resultados de Huang [15] y Prüss [33] para el decaimiento exponencial y la tasa de decaimiento polinomial del semigrupo, siguiendo los resultados de Liu y Rao [22].

1.3.2 Objetivo Específico.

Nuestro objetivo específico es mostrar la existencia y unicidad de la solución mediante la teoría de los semigrupos lineales mediante el Teorema de Lummer Philips, el problema este bien puesto y con los mismos resultados de los semigrupos ver la estabilidad exponencial y polinomial.

CAPÍTULO 2

Preliminares

2.1. Análisis Funcional y Espacios de Sobolev

A través de este capítulo, los espacios de Banach definidos sobre el cuerpo de los reales o complejos lo denotaremos con X , Y a los espacios de Hilbert con H , salvo especificaciones en su debido momento.

Análisis Funcional

Definición 2.1: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(A)$.

1. Diremos que A es **acotado**, si existe un número positivo $C \geq 0$ tal que $\|Av\|_Y \leq C\|v\|_X, \forall v \in \mathcal{D}(A)$.
Caso contrario, diremos que A es “**no acotado**”.
2. Diremos que A es “**densamente definido**” sobre X , si se cumple que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
3. Llamaremos “**cerrado**” al operador A si su grafico $G(A) = \{(u, Au) \in X \times Y : u \in \mathcal{D}(A)\}$ es un subespacio cerrado en $X \times Y$, siendo $X \times Y$ un espacio de Banach mediante la norma $\|\cdot\|_{X \times Y} = (\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2)^{1/2}$.
4. Sea X e Y dos espacios normados. Definimos el conjunto,

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{A: X \rightarrow Y : A \text{ es un operador lineal y acotado}\}$$

Y en ella definimos la norma del supremo dado por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|v\|_X \leq 1} \|Av\|_Y$$

Se verifica que.

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|v\|_X = 1} \|Av\|_Y = \sup_{\|v\|_X < 1} \|Av\|_Y = \sup_{\|v\|_X \neq 0} \frac{\|Av\|_Y}{\|v\|_X}$$

En algunos casos usaremos una u otra definición de norma dependiendo del caso que desarrollemos, además, se cumple que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach, si Y es un espacio de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto $\mathcal{L}(X, X)$.

Teorema 2.2 (Teorema de la Aplicación Abierta): Sea, $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal, acotado y sobreyectivo. Entonces, $\exists r > 0$ tal que $B_Y(0; r) \subset A(B_X(0; 1))$.

Prueba: **Revisar [9]**

■

Corolario 2.3: Sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal, biyectivo y acotado; se cumple que A^{-1} también es acotado.

Prueba: **Revisar [9]**

■

Teorema 2.4 (Teorema del Grafico Cerrado): Sea $A: X \rightarrow Y$ un operador lineal y cerrado, entonces A es acotado.

Prueba: **Revisar [9]**

■

“Teorema 2.5 (Operador Cerrado): Sean X e Y dos espacios normados, $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado.

1. Si $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en X , entonces A es cerrado.
2. Si Y es un espacio de Banach y A es cerrado, entonces $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en X .”

Prueba: **Revisar [19]**

■

“Teorema 2.6 (Teorema de la Acotación Uniforme): Sea Y un espacio normado y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia en $\mathcal{L}(X, Y)$.

Si $\sup_{i \in I} \|A_i u\|_Y < \infty, \forall u \in X$, entonces $\sup_{i \in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$ ”

Prueba: **Revisar [14]**

■

“Teorema 2.7: Sea X un espacio normado, $Y \subset X$ subespacio.

1. Si X es reflexivo, entonces X es completo.
2. Si X es un espacio de Banach. Entonces,
 Y es completo $\Leftrightarrow Y$ es cerrado en X .
3. Si el dual de X (X') es separable, entonces X es separable.
4. Si $\dim(Y) < \infty$, entonces Y sería reflexivo, completo y cerrado en X .”

Prueba: **Revisar [19]**

■

“Teorema 2.8: Sea $Y \subset H$ subespacio.

1. Si H es de Hilbert, entonces H es reflexivo.
2. Si H es separable, entonces Y también es separable.
3. Si Y es cerrado en H , entonces $Y = (Y^\perp)^\perp$ y $H = Y \oplus Y^\perp$.
4. Y es denso en $H \Leftrightarrow Y^\perp = \{0\}$.”

Prueba: **Revisar [19]**

■

“Proposición 2.9: Sea X un espacio de Banach, Y un subespacio de X y $0 < r < 1$. Si $\bar{Y} \neq X$, entonces $\exists y_0 \in X$ tal que $\|y_0\| = 1$ y $\|y - y_0\| \geq r, \forall y \in \bar{Y}$ ”

Prueba: **Revisar [27]**

■

Teorema 2.10: Sea $A \in \mathcal{L}(X)$.

Si $\|A\| < 1$, entonces $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(I - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^i$.

Prueba: **Revisar [19]**

■

“Definición 2.11: Sea X un espacio de Banach complejo y $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal.

1. Se define el **Conjunto Resolvente de A** , denotado por $\varrho(A)$, como:

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ y tiene dominio denso en } X\}$$

Además, para cada $\lambda \in \varrho(A)$, el operador $R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1}$ es llamado el **Resolvente de A** .

2. Se define el **Espectro de A** , denotado por $\sigma(A)$, al conjunto $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$.

“Proposición 2.12 (Dominio de $R(\lambda; A)$): Sean X de Banach complejo, $A: X \rightarrow X$ lineal y $\lambda \in \varrho(A)$. Si A es cerrado o acotado, entonces $\mathcal{D}(R(\lambda; A)) = X$.”

Prueba: **Revisar [19]**

■

Teorema 2.13 (Representación del Resolvente): Sean X y $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ como en proposición 2.12. Si $\mu \in \varrho(A)$ y $|\lambda - \mu| = \|R(\lambda; A)\|^{-1}$, entonces

$$\lambda \in \varrho(A) \text{ y } R(\lambda; A) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu I - A)^i R(\mu; A)^{i+1}.$$

Prueba: **Revisar [27]**

■

Corolario 2.14 (Resolvente y Espectro): Con las mismas hipótesis dadas en proposición 2.12, para X y A se tiene:

1. $\varrho(A)$ es un conjunto abierto en \mathbb{C} y $R(\lambda; A)$ es una función continua en $\varrho(A)$.
2. Si A es un operador acotado (o continuo) en X , entonces $\sigma(A)$ es un conjunto compacto (cerrado y limitado) no vacío en \mathbb{C} .
Además, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$.

Prueba: **Revisar [27]**

■

“Teorema 2.15 (Ecuación Resolvente y Conmutatividad): Sea X un espacio de Banach complejo, $A, S \in \mathcal{L}(X)$ y $\lambda, \mu \in \varrho(A)$.

1. Entonces, $R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\lambda - \mu)R(\lambda; A)R(\mu; A)$, que es llamada Ecuación Resolvente
2. Si $AS = SA$ entonces $R(\lambda; A)S = SR(\lambda; A)$.
3. Entonces $R(\lambda; A)R(\mu; A) = R(\mu; A)R(\lambda; A)$.

Prueba: **Revisar [27]**

■

“Teorema 2.16: Sea X un espacio de Banach complejo, $A \in \mathcal{L}(X)$ y $\mu \in \varrho(A)$.

1. Entonces, $R(\lambda; A)$ es analítico en $\varrho(A)$.
2. Entonces, $\frac{1}{d(\mu)} \leq \|R(\mu; A)\|$, donde $d(\mu) = \text{dist}(\mu, \varrho(A)) := \inf_{\substack{\lambda \in \varrho(A) \\ \lambda \neq \mu}} \|\mu - \lambda\|$.

Además, si $d(\mu) \rightarrow 0$ entonces $\|R(\mu; A)\| \rightarrow \infty$.”

Prueba: **Revisar [28]**

Definición 2.17: Sea X un espacio de Banach complejo y $A \in \mathcal{L}(X)$.

Se define el **Radio Espectral** de A , denotado por $R_\sigma(A)$, como el número real

$$R_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Proposición 2.18: Para $A \in \mathcal{L}(X)$, se cumple que, $R_\sigma(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.”

Prueba: **Revisar [19]**

■

Teorema 2.19 (“Teorema de la Representación de Riesz”): Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert y $f \in H^*$. Entonces $\exists! v_f \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v_f \rangle_H, \forall u \in H$.

Además, $\|f\|_{H^*} = \|v_f\|$.

Por otro lado, para cada $v \in H$, la aplicación $g_v(u) = \langle u, v \rangle_H, \forall u \in H$ pertenece a H^* .

Además, $\|g_v\|_{H^*} = \|v\|$.

Prueba: **Revisar [37]**

■

Definición 2.20: Sea X un espacio de Banach normado, $B(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ y $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dos aplicaciones

1. $B(\cdot, \cdot)$ es llamado **Forma Sesquilineal**, si $\forall u, v, w \in X$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifican
 - a. $B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v)$
 - b. $B(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} B(u, v) + \bar{\beta} B(u, w)$
2. Si \mathbb{K} es \mathbb{R} , entonces $B(\cdot, \cdot)$ es llamado **Forma Bilineal**.
3. Llamaremos a f **Antilineal**, si $f(\alpha u + v) = \bar{\alpha} f(u) + f(v), \forall u, v \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observación 2.21: Si f es antilineal y $g \in X^*$, entonces $\bar{f} \in X^*$ y \bar{g} es antilineal, donde X es un espacio normado sobre los complejos.

Definición 2.22: Sea X un espacio de normado, y $B(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ una forma sesquilineal.

1. $B(\cdot, \cdot)$ es **continuo** y **acotado**, si $\exists M > 0$ tal que $|B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v \in X$.
2. $B(\cdot, \cdot)$ es **coercivo**, si $\exists c > 0$ tal que $B(u, u) \geq c \|u\|^2, \forall u \in X$.

Teorema 2.23 (“Teorema de Lax – Milgram”): Sea H un espacio de Hilbert, $B(\cdot, \cdot)$ una forma sesquilineal, coerciva y continua. Entonces $\exists! T: H \rightarrow H$ isomorfismo tal que

$$B(u, v) = \langle u, Tv \rangle_H, \forall u, v \in H.$$

Prueba: **Revisar [37]**

■

Corolario 2.24 (Caso Real): Sean H de Hilbert sobre \mathbb{R} y $B(\cdot, \cdot)$ bilineal, coerciva y continua. Si $f \in H^*$, entonces $\exists! u \in H$ tal que $B(u, v) = f(v), \forall v \in H$.

Prueba: **Revisar [9]**

■

“Corolario 2.25 (Caso Complejo): Sea H un espacio de Hilbert sobre \mathbb{C} , $B(.,.)$ una forma sesquilineal, coerciva y continua. Si $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación antilineal, entonces $\exists! u \in H$ tal que $B(u, v) = f(v)$, $\forall v \in H$.”

Prueba: **Revisar [37]**

■

Espacios de Sobolev

En esta sección, usaremos las siguientes notaciones:

“ $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$.”

\hookrightarrow : inmersión continua.

\xrightarrow{C} : inmersión continua y compacta.”

Teorema 2.26 (“Du – Bois – Raymond”): Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $u = 0$ casi siempre en Ω .

Prueba: **Revisar [10]**

■

Teorema 2.27 (Desigualdad de Poincaré): Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y abierto con $1 \leq p < +\infty$. Entonces $\exists C_p > 0$, que depende de Ω y p , tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ donde: } \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Prueba: **Revisar [9]**

■

“Teorema 2.28 (Regularidad Elíptica): Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular, L un operador diferencial elíptico de orden $2m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $f \in L^2(\Omega)$. Si v es una solución de $Lu = f$ en el sentido distribucional, entonces $v \in H^{2m}(\Omega)$.”

Prueba: **Revisar [1]**

■

Corolario 2.29: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular y $f \in L^2(\Omega)$.

Si v es solución de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$, entonces $v \in H^2(\Omega)$ y $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, para algún $C > 0$.

Prueba: **Revisar [1]**

■

Teorema 2.30 (Inmersión Continua): Se cumple lo siguiente,

1. Caso: $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$. Se verifican
 - a. Si $mp < n$ y $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.
 - b. Si $mp = n$ y $p \leq q < +\infty$, entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

- c. Si $mp > n$, y $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, k es un entero no negativo, entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, donde
- i. $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p}$ si $m - k - \frac{n}{p} < 1$,
 - ii. $0 < \lambda < 1$ si $m - k - \frac{n}{p} = 1$.
2. “Caso: $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$. Se verifican:
- a. Si $p = 1$, entonces $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.
 - b. Si $1 < p < +\infty$ y $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$, entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.”
3. “Caso: $n, m \in \mathbb{N}$ y $p = +\infty$. Entonces, $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo a $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.”

Prueba: **Revisar [25]**

■

Teorema 2.31 (Inmersión Continua): Se cumple lo siguiente,

1. Caso: $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^m . Se verifican:
 - a. Si $mp < n$ y $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
 - b. Si $mp = n$ y $1 \leq q < +\infty$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
 - c. Si $mp > n$, y $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, k es un entero no negativo, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$, donde
 - i. $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p}$ si $m - k - \frac{n}{p} < 1$,
 - ii. $0 < \lambda < 1$ si $m - k - \frac{n}{p} = 1$.
2. “Caso: $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < +\infty$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado. Se cumple que:
 - a. Si $p = 1$, entonces $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\bar{I})$.
 - b. Si $1 < p < +\infty$ y $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$, entonces $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\bar{I})$.”
3. “Caso: $n, m \in \mathbb{N}$ y $p = +\infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^m . Entonces, $W^{m,+\infty}(\Omega)$ es isomorfo a $C^{m-1,1}(\bar{\Omega})$.”

Prueba: **Revisar [25]**

■

Corolario 2.32: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces $W^{m,+\infty}(\Omega)$ es isomorfo a $C^{m-1,1}(\bar{\Omega})$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Prueba: **Revisar [25]**

■

Definición 2.33: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $M \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que M esta “**Fuertemente Incluido** en Ω , denotado por $M \subset\subset \Omega$ ”, si se cumple que $\bar{M} \subset \Omega$ y \bar{M} es compacto en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.34 (“Fréchet – Kolmogorov”): Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ un conjunto acotado, con $1 \leq p < +\infty$. Si se cumple que,

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \Lambda \subset \subset \Omega: \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Lambda)} < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$
2. $\forall \epsilon > 0 \text{ y } \forall \Lambda \subset \subset \Omega, \text{ existe } \delta > 0 \text{ con } \delta < \text{dis}(\Lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \text{ tal que}$
 $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega \setminus \Lambda)} < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F} \text{ y } \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ con } |h| < \delta.$

Entonces \mathcal{F} es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$, es decir, $\bar{\mathcal{F}}$ es compacto en $L^p(\Omega)$.

Prueba: **Revisar [9]**

■

Teorema 2.35 (“Rellich – Kondrachov”): Sea $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^1 . Se cumple que,

1. Si $p < n$ y $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{C} L^q(\Omega).$
2. Si $p = n$ y $1 \leq q < +\infty$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{C} L^q(\Omega).$
3. Si $n < p \leq +\infty$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{C} C^0(\bar{\Omega}).$

Prueba: **Revisar [9]**

■

Corolario 2.36: Sea $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^m . Se cumple que,

1. Si $p < n$ y $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} W^{m-1,q}(\Omega).$
2. Si $p = n$ y $1 \leq q < +\infty$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} W^{m-1,q}(\Omega).$
3. Si $n < p \leq +\infty$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} C^{m-1}(\bar{\Omega}).$

Prueba: **Revisar [25]**

■

Corolario 2.37: Sea $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^m . Se cumple que,

1. Si Ω es de clase C^{m+1} , entonces $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{C} W^{m,p}(\Omega).$
2. $W_0^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{C} W_0^{m,p}(\Omega).$

Prueba: **Revisar [25]**

■

Teorema 2.38 (Inmersión Compacta): Sea $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^m . Se cumple que,

1. Si $mp < n$ y $1 \leq q < \frac{np}{n-mp}$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} L^q(\Omega).$
2. Si $mp = n$ y $1 \leq q < +\infty$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} L^q(\Omega).$
3. Si $mp > n$, y $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, k es un entero no negativo, entonces
 $W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{C} C^k(\bar{\Omega}).$

Prueba: **Revisar [25]**

■

2.2.Semigrupos

Definición 2.39: Diremos que la familia $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, es un **Semigrupo** en X si:

1. $S(0) = I$,
2. $S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0$,

donde I es el operador identidad de $\mathcal{L}(X)$.

Definición 2.40: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo en X . Definimos el operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ por,

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \right\}$,
2. $Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t}, \forall u \in \mathcal{D}(A)$,

es llamado el “**Generador Infinitesimal**” del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Observación 2.41: Se tiene:

1. $\mathcal{D}(A) = \{u \in X : Au \in X\}$.
2. Para $A \in \mathcal{L}(X)$, se cumple que, $\{S(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo en X y su generador infinitesimal es A .

Semigrupos Uniformemente Continuos.

Definición 2.42: Diremos que, el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es **Uniformemente Continuo** en $\mathcal{L}(X)$, si $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Proposición 2.43: El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en X es Uniformemente Continuo $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow r} \|S(t) - S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Prueba: **Revisar [32]**

■

Teorema 2.44: Sean $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dos semigrupos en X .

Si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t}$, entonces $T(t) = S(t), \forall t \geq 0$.

Prueba: **Revisar [28]**

Teorema 2.45:

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es uniformemente continuo, si y solo si, $S(t) = e^{tA}, \forall t \geq 0$, para algún $A \in \mathcal{L}(X)$.

Prueba: **Revisar [27]**

■

Corolario 2.46: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X . Se cumple que,

1. $\exists \omega \geq 0$ tal que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \forall t \geq 0$.

2. La función $t \mapsto S(t)$ es diferenciable y $\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A$, en $[0, +\infty)$.

Prueba: **Revisar [32]**

■

Semigrupos de Clase C_0 o C_0 – Semigrupos.

Definición 2.47:

1. Diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un **Semigrupo de clase C_0** o también llamado **C_0 – Semigrupo**, si $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u = u, \forall u \in X$
2. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es llamado **fuertemente continuo**, si $\lim_{t \rightarrow r} S(t)u = S(r)u, \forall u \in X$.

Proposición 2.48:

1. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 – Semigrupo $\Leftrightarrow \{S(t)\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo.
2. Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es uniformemente continuo, entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 .

Prueba: **Revisar [32]**

■

Teorema 2.49: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 en X . Se cumple que,

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} := \omega_0$.
2. $\forall \omega > \omega_0$, existe una constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$.

Prueba: **Revisar [27]**

■

“Corolario 2.50: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ como en teorema 2.49. Entonces existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$.”

Prueba: **Revisar [32]**

■

Corolario 2.51: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ con las hipótesis del corolario 2.50. Entonces para cada $u \in X$, la aplicación $t \mapsto S(t)u$ es continua en $[0, +\infty)$.

Prueba: **Revisar [32]**

■

Definición 2.52: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 en X .

Se dice que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es **Uniformemente Acotado**, si $\exists M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$.

Si $M = 1$, es llamado un **C_0 – semigrupo de contracciones**.

Teorema 2.53: Sea A el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces,

1. $\forall u \in X$, se tiene $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(r)u dr = S(t)u$.
2. $\forall u \in X$, se tiene $\int_0^t S(r)u dr \in D(A)$ y $A \left(\int_0^t S(r)u dr \right) = S(t)u - u$.
3. $\forall u \in D(A)$, se tiene $S(t)u \in D(A), \forall t \geq 0$ y $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u = S(t)Au$.

$$4. \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \text{ se tiene } S(t)u - S(s)u = \int_s^t S(r)Au \, dr = \int_s^t AS(r)u \, dr.$$

Prueba: **Revisar [32]**

■

Corolario 2.54: Sea $S(t)$ de clase C_0 en X con generador infinitesimal A . Entonces $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y el operador lineal A es cerrado.

Prueba: **Revisar [32]**

■

Teorema 2.55: Sea X un espacio de Banach, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dos semigrupos de clase C_0 en X con sus generadores infinitesimales A y B respectivamente.

Si $A = B$, entonces $S(t) = T(t)$, $\forall t \geq 0$.

Prueba: **Revisar [32]**

■

Definición 2.56: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupo de clase C_0 en X con generador infinitesimal A . Se simbolizará por $A^0 = I$ y $A^1 = A$.

Suponiendo que A^{n-1} está bien definido, entonces podemos definir A^n como,

$$\mathcal{D}(A^n) = \{u \in X : u \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \text{ y } A^{n-1}u \in \mathcal{D}(A)\},$$

$$A^n u = A(A^{n-1}u), \forall u \in \mathcal{D}(A^n).$$

Proposición 2.57: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupo de clase C_0 en X con generador infinitesimal A . Se cumple que,

1. $\mathcal{D}(A^n)$ es “un subespacio vectorial de X y A^n es un operador lineal.”
2. Para todo $u \in \mathcal{D}(A^n)$, se tienen:
 - a. $S(t)u \in \mathcal{D}(A^n)$, $\forall t \geq 0$.
 - b. $\frac{d^n}{dt^n} S(t)u = A^n S(t)u = S(t)A^n u$.
3. Formula de Taylor: Si $u \in \mathcal{D}(A^n)$, entonces

$$S(t)u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} S^k S(t_0)u + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-r)^{n-1} A^n S(r)u \, dr.$$

4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ es denso en X .

Prueba: **Revisar [27]**

■

Proposición 2.58: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 en X con generador infinitesimal A . Si $\exists M > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$ entonces

$$\|Au\|^2 \leq 4M^2 \|A^2 u\| \|u\|, \forall u \in \mathcal{D}(A^2).$$

Prueba: **Revisar [32]**

■

“Proposición 2.59: Sea X un espacio de Banach, $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal y cerrado. El funcional $\|\cdot\|_n: \mathcal{D}(A^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|u\|_n = \sum_{k=0}^n \|A^k u\|$ es una norma sobre $\mathcal{D}(A^n)$. Con dicha norma, $\mathcal{D}(A^n)$ es un espacio de Banach.”

Prueba: **Revisar [27]**

■

“Definición 2.60: Sea X un espacio de Banach, $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal y cerrado. La norma $\|\cdot\|_n: \mathcal{D}(A^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|u\|_n = \sum_{k=0}^n \|A^k u\|$ es llamada la **Norma del Gráfico.**”

Proposición 2.61: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 en X con generador infinitesimal A . Entonces, para cada $u \in \mathcal{D}(A^n)$, se tiene que,

$$S(t)u \in C^{n-k}([0, +\infty); \mathcal{D}(A^k)), \forall k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ con la norma del gráfico.}$$

Prueba: **Revisar [27]**

■

Teorema de Hille – Yosida

Definición 2.62: Sean X^* espacio dual de X y $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ operador lineal. Para cada $u \in X$, se define el **conjunto dualidad** $F(u) \subset X^*$, como

$$F(u) = \{u^* \in X^* : \langle u, u^* \rangle_{X \times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\}.$$

Diremos que A es **disipativo**, si para cada $u \in \mathcal{D}(A)$, se cumple que,

$$\operatorname{Re} \langle Au, u^* \rangle_{X \times X^*} \leq 0, \forall u^* \in F(u).$$

“Observación 2.63: Si $X = \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, aplicando el teorema de representación de Riesz, se obtiene que:

$$A \text{ será disipativo} \Leftrightarrow \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \forall u \in \mathcal{D}(A)."$$

Teorema 2.64: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal.

A será disipativo $\Leftrightarrow \|(\lambda I - A)u\| \geq \lambda \|u\|, \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0$.

Prueba: **Revisar [32]**

■

“Teorema 2.65: Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 en \mathcal{H} con generador infinitesimal A .

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase $C_0 \Leftrightarrow A$ es disipativo.”

Prueba: **Revisar [28]**

■

Lema 2.66: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal.

Si $\exists \{A_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{L}(X)$ sucesión, tal que,

1. $A_m u \rightarrow Au$ en $X, \forall u \in \mathcal{D}(A),$
2. $\{e^{tA_m}\}_{m \geq 1} \rightarrow S(t)$ en $\mathcal{L}(X), \forall t \geq 0,$

entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A .

Prueba: **Revisar [28]** ■

Lema 2.67: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ operador lineal no acotado. Si se verifica que,

1. “ A es cerrado y $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ y $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$, donde $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

entonces $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda; A)u = u$, $\forall u \in X$.”

Prueba: **Revisar [32]** ■

“Definición 2.68: Sea X un espacio de Banach y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$. Para cada $\lambda > 0$, se define la **Aproximación de Yosida** de A , como la aplicación lineal acotada $A_\lambda: X \rightarrow X$ tal que $A_\lambda := \lambda A R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$.”

“Lema 2.69: Sea X un espacio de Banach, y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ no acotado. Si el operador A verifica las condiciones del lema 2.67, se cumple que,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda u = Au, \forall u \in \mathcal{D}(A).”$$

Prueba: **Revisar [32]** ■

“Lema 2.70: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal no acotado. Si A verifica las condiciones del lema 2.67, se cumple que, $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, uniformemente continuo, tal que

$$\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|, \forall \lambda, \mu > 0.”$$

Prueba: **Revisar [32]** ■

“Teorema 2.71 (Hille – Yosida): Sea X un espacio de Banach, y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ no acotado. Se cumple lo siguiente:

A será el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 , si y solo si,

1. A es cerrado y su dominio es denso en X , es decir, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ y $\frac{1}{\lambda} \geq \|R(\lambda; A)\|$, $\forall \lambda > 0$.”

Prueba: **Revisar [32]** ■

“Corolario 2.72: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupo de contracciones de clase C_0 , con generador infinitesimal A . Entonces

$$S(t)u = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}u, \forall u \in X.”$$

Prueba: **Revisar [32]**

■

“Corolario 2.73: Sea X un espacio de Banach, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones de clase C_0 , con generador infinitesimal A . Entonces

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \varrho(A) \text{ y para tal } \lambda \text{ se cumple que } \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.”$$

Prueba: **Revisar [32]**

■

“Corolario 2.74: Sea X un espacio de Banach, y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$. Se cumple que,

A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 , $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, tal que $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$ y algún ω , si y solo si,

1. A es cerrado y su dominio es denso en X , es decir, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\lambda) = 0, \lambda > \omega\} \subset \varrho(A)$, además, para tal λ se cumple que $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$ ”

Prueba: **Revisar [32]**

■

“Proposición 2.75: Sea X un espacio de Banach, un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, $B \in \mathcal{L}(X)$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 .

Si $AB = BA$, y A es el generador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, entonces $(A + B)$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)e^{tB}\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 .”

Prueba: **Revisar [28]**

■

El Teorema de Lummer – Phillips

“Teorema 2.76 (Lummer – Phillips): Sea X un espacio de Banach, y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ densamente definido.

1. Si A es disipativo y $\exists \lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, entonces A es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 .
2. Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 , entonces A es disipativo y $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.”

Prueba: **Revisar [28]**

■

“Corolario 2.77: Sea X un espacio de Banach, y sea un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ cerrado y densamente definido.

Si A y A^* son disipativos, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 .”

Prueba: **Revisar [28]**

■

Lema 2.78: Sean $B, S \in \mathcal{L}(X)$ y con inversa acotada.

Si $\|B\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$, entonces $(S + B)$ es lineal, acotado e inversible.

Prueba: **Revisar [28]**

■

“Teorema 2.79: Sea X un espacio de Banach, y un operador lineal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ densamente definido y disipativo.

Si $0 \in \varrho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 .”

Prueba: **Revisar [28]**

■

Teorema 2.80: Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ lineal disipativo con $\text{Im}(I - A) = X$. Si X es reflexivo, entonces A es densamente definido, es decir, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Prueba: **Revisar [28]**

■

2.3.El Problema de Cauchy Abstracto

Sea $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal y $x_0 \in X$.

Definición 2.81: El **Problema de Cauchy Abstracto** o PVI (Problema de Valor Inicial), es una ecuación de primer orden de la forma,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = AU(t), t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}.$$

Teorema 2.82: Sean $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 – semigrupo con generador infinitesimal $A: \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, y el problema de Cauchy Abstracto:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = AU(t), t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases},$$

Si $U_0 \in X$, el problema de Cauchy Abstracto tiene una única solución débil U tal que $U \in C([0; \infty), X)$ y $\|U(t)\|_X = \|S(t)U_0\|_X \leq C\|U_0\|_X$

Si $U_0 \in \mathcal{D}(A)$, el problema de Cauchy Abstracto tiene una única solución fuerte U tal que $U \in C([0; \infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0; \infty), X)$ y $\|U(t)\|_{\mathcal{D}(A)} + \|U_t(t)\|_X \leq \|S(t)AU_0\|_X \leq C\|U_0\|_{\mathcal{D}(A)}$.

Prueba: **Revisar [38]**

■

2.4. Estabilidad Exponencial

Presentaremos a continuación resultados importantes para la obtención de la estabilidad exponencial del semigrupo $S(t)$ de clase C_0 sobre un espacio de Hilbert.

“Definición 2.83: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 , con generador infinitesimal A .

Diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es **Exponencialmente Estable**, si existen constantes $\mu > 0$ y $M \geq 1$ tales que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$.”

“Definición 2.84: Sea $T: \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal

Se define la **Cota Superior del Espectro** de T , denotado por $\omega_\sigma(T)$, como,

$$\omega_\sigma(T) := \sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.”$$

“Definición 2.85: Sea X un espacio de Banach, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A . Se define el **Tipo del Semigrupo generado** por A , denotado por $\omega_0(A)$, como,

$$\omega_0(A) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}.”$$

Proposición 2.86: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces, se cumple,

1. $\omega_0(tA) = t\omega_0(A)$, $\forall t > 0$.
2. $\forall \epsilon > 0$, existe $M_\epsilon \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon e^{(\omega_0(A) + \epsilon)t}$, $\forall t > 0$.

Prueba: **Revisar [28]**

■

Proposición 2.87: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 y de contracciones con generador infinitesimal A .

Si $\omega_0(A) = 0$, entonces $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, $\forall t > 0$.

Prueba: **Revisar [28]**

■

Lema 2.88: Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 con generador infinitesimal A . Se cumple lo siguiente,

1. $\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A)$.
2. $R_\sigma(S(t)) = e^{\omega_0(A)t}$, $\forall t > 0$.

Prueba: **Revisar [28]**

■

Teorema 2.89: Sean X un espacio de Banach, $f \in C([0,1]; X)$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 – semigrupo con generador infinitesimal A . La ecuación

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = Au(t) + f(t), \text{ en } [0,1] \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

tiene una única solución periódica de periodo 1, si y solo si, $1 \in \varrho(S(1))$.

Prueba: **Revisar [28]** ■

“Teorema 2.90: Sea X un espacio de Banach, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A .

$$1 \in \varrho(S(1)) \Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi i \in \varrho(A), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|(2k\pi i I - A)^{-1}\| < \infty. \end{cases}$$

Prueba: **Revisar [28]** ■

Corolario 2.91: Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 con A su generador infinitesimal. Se cumple lo siguiente,

$$e^{\lambda t} \in \varrho(S(t)), \text{ si y solo si, } \begin{cases} \left(\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \right) \in \varrho(A) \\ \left\| \left(\left(\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \right) I - A \right)^{-1} \right\| < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Prueba: **Revisar [28]** ■

Lema 2.92: Con las hipótesis del corolario 2.91

Si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < e^{\lambda t}$, $\forall t \geq 0$, entonces $e^{\lambda} \in \varrho(S(1))$.

Prueba: **Revisar [28]** ■

Teorema 2.93: Sean $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Se cumple lo siguiente,

$$\omega_0(A) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty, \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq \mu\}.$$

Prueba: **Revisar [28]** ■

“Corolario 2.94: Con las hipótesis del corolario 2.93.

Si $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\} \subset \varrho(A)$ y $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, $\forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, entonces $\forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq -\epsilon$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq -\epsilon\} \subset \varrho(A)$ y $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.”

Prueba: **Revisar [28]**

Corolario 2.95: Considerando las mismas hipótesis del corolario 2.94.

Si $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\} \subset \varrho(A)$ y $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, $\forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, entonces, el C_0 – semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tiene una estabilidad exponencial.

Prueba: **Revisar [28]**

■

“Definición 2.96: Sean $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 con A su generador infinitesimal. Diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tiene la **Propiedad de Crecimiento Determinado por el Espectro**, si $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$.”

“Proposición 2.97: Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A . Se cumple lo siguiente:

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tiene la Propiedad de Crecimiento Determinado por el Espectro, si y solo si, $\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon > 0$ tal que $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M_\epsilon, \forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon$.”

Prueba: **Revisar [28]**

■

Teorema 2.98 (Gearhart): Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracción de clase C_0 , y A su generador infinitesimal. Se cumple lo siguiente: $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tiene una estabilidad exponencial, si y solo si,

$$\begin{cases} i\mathbb{R} \subset \varrho(A) \\ \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \end{cases}$$

Prueba: **Revisar [13]**

■

Teorema 2.99 (Pruss – Huang – Renardy): Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Se cumple lo siguiente: El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es exponencialmente estable, si y solo si,

$$\begin{cases} i\mathbb{R} \subset \varrho(A) \\ \exists C > 0 \text{ tal que } \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prueba: **Revisar [33]**

■

Observación 2.100: Gracias a Gearhart y al trabajo en conjunto de Pruss, Huang y Renardy hay dos maneras de determinar la estabilidad exponencial para semigrupos de contracciones clase C_0 sobre un espacio de Hilbert. Para una demostración de dicha equivalencia se puede revisar **Liu – Zheng [23]**.

Ahora, si no se puede determinar la estabilidad exponencial del semigrupo, entonces se debe buscar otra forma de determinar la estabilidad del sistema. En tal caso, otra manera de estabilizar el sistema es mediante la estabilidad polinomial de las soluciones.

2.5. Estabilidad Polinomial

Para determinar la estabilidad polinomial de semigrupos de contracciones de clase C_0 veremos los resultados de Liu – Rao y Borichev – Tomilov. Ellos determinaron condiciones suficientes para poder estabilizar polinomialmente un sistema.

“Definición 2.101: Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A . Diremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es **Polinomialmente Estable** si $\exists C, \gamma > 0$ tales que

$$\|S(t)x\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma} \|x\|_{D(A)}, \forall x \in D(A).”$$

Teorema 2.102 (Liu – Rao): Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente acotado de clase C_0 con generador infinitesimal A tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$.

Suponga que $\exists \alpha > 0$ tal que $\frac{1}{|\lambda|^\alpha} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$\|S(t)\omega\|_{\mathcal{H}} \leq C_k \left(\frac{\ln(t)}{t} \right)^{k/\alpha} \ln(t) \|\omega\|_{D(A^k)}.$$

Prueba: **Revisar [22]**

■

Observación 2.103: En el teorema anterior, de Liu – Rao, el termino $\ln(t)$ hace que el decaimiento polinomial tenga un mayor grado, por lo que el decaimiento se atrasa. Esa deficiencia fue mejorada por Borichev – Tomilov (2009) mediante el siguiente teorema.

“Teorema 2.104 (Borichev – Tomilov): Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo acotado de clase C_0 con generador infinitesimal A .

Si $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, se cumple lo siguiente,

$\frac{1}{|\lambda|^\alpha} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, si y solo si, $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}$, donde $\alpha > 0$.”

Prueba: **Revisar [7]**

■

CAPITULO 3

Existencia y unicidad

En esta sección vamos a transformar el sistema (1.1) – (1.3) a un sistema de Cauchy Abstracto, donde veremos que tiene solución y es única. Determinaremos primero la energía asociada al sistema (1.1) – (1.3), luego la existencia del semigrupo asociado al mismo sistema, y, por último, que el operador que se defina sea un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0 .

3.1. La energía del sistema

La energía de las soluciones del sistema (1.1) – (1.3) sujeta a la condición inicial (1.7) y cualquiera de las condiciones de frontera (1.5) o (1.6) es definido por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + EI |\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh |\omega_x - l\varphi|^2) dx \quad (3.1)$$

Un cálculo directo muestra que,

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L (a_1(x) |\psi_t|^2 + a_2(x) |\omega_t|^2) dx < 0 \quad (3.2)$$

Prueba:

Multiplicando (1.1), (1.2) y (1.3) por φ_t , ψ_t y ω_t respectivamente:

$$\varphi_t [\rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lEh(\omega_x - l\varphi)] = 0$$

$$\psi_t [\rho_2 \psi_{tt} - EI \psi_{xx} + Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_1(x) \psi_t] = 0$$

$$\omega_t [\rho_1 \omega_{tt} - Eh(\omega_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) + a_2(x) \omega_t] = 0$$

Sumando e integrando:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx + \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx - \underbrace{\int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x \varphi_t dx}_{=0} \\ & + \int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t dx - \underbrace{\int_0^L EI \psi_{xx} \psi_t dx}_{=0} + \int_0^L lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t dx \\ & - \int_0^L lEh(\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx - \underbrace{\int_0^L Eh(\omega_x - l\varphi)_x \omega_t dx}_{=0} + \int_0^L a_1(x) \psi_t \psi_t dx + \int_0^L a_2(x) \omega_t \omega_t dx = 0 \end{aligned}$$

Ahora por el teorema de Green para $n = 1$, y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
\circ - \int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)_x \varphi_t dx &= \underbrace{-Gh(\varphi_x + \psi + l\omega)\varphi_t|_{x=0}^{x=L}}_{\text{cero}} + Gh \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} dx \\
\circ - \int_0^L EI \psi_{xx} \psi_t dx &= \underbrace{-EI \psi_x \psi_t|_{x=0}^{x=L}}_{\text{cero}} + EI \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx \\
\circ - \int_0^L Eh(\omega_x - l\varphi)_x \omega_t dx &= \underbrace{-Eh(\omega_x - l\varphi)\omega_t|_{x=0}^{x=L}}_{\text{cero}} + Eh \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} dx
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx + \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx + Gh \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} dx \\
& + \int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t dx + EI \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx + \int_0^L lGh(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t dx \\
& - \int_0^L Ehl(\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx + Eh \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} dx + \int_0^L a_1(x) \psi_t \psi_t dx + \int_0^L a_2(x) \omega_t \omega_t dx = 0
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx + \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx + EI \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx \\
& + \int_0^L a_1(x) \psi_t \psi_t dx + \int_0^L a_2(x) \omega_t \omega_t dx + \int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx \\
& + \int_0^L Eh(\omega_x - l\varphi) (\omega_x - l\varphi)_t dx = 0
\end{aligned}$$

Ahora notamos que:

$$\begin{aligned}
\circ \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx \\
\circ \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 dx \\
\circ \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 dx \\
\circ EI \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L EI |\psi_x|^2 dx \\
\circ \int_0^L Gh(\varphi_x + \psi + l\omega) (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \\
\circ \int_0^L Eh(\omega_x - l\varphi) (\omega_x - l\varphi)_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L Eh |\omega_x - l\varphi|^2 dx
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + EI |\psi_x|^2 + Gh |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 \\ + Eh |\omega_x - l\varphi|^2] dx = - \underbrace{\int_0^L a_1(x) \psi_t \psi_t dx + \int_0^L a_2(x) \omega_t \omega_t dx}_{\frac{d}{dt} E(t)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dt} E(t) < 0$

■

Entonces la energía es decreciente.

3.2. Existencia del Semigrupo

Para verificar la existencia de la solución del sistema, usaremos la teoría de semigrupos, para tal efecto redefiniremos el sistema (1.1) – (1.3) como un sistema en el tiempo de primer orden.

Sea $U := (\varphi, \psi, \omega, u, v, z)'$, donde $'$ representa la transpuesta del vector fila U , es así que, el sistema (1.1) – (1.3) es equivalente al problema de Cauchy abstracto,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = A_j U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $U_0 := (\varphi_0, \psi_0, \omega_0, u_0, v_0, z_0)'$, $u_0 = \varphi_1, v_0 = \psi_1, z_0 = \omega_1$ y A_j es el operador diferencial que se asocia al sistema (1.1) – (1.3) dado por

$$A_j := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{Gh\partial_x^2 - l^2 Eh}{\rho_1} & \frac{Gh\partial_x}{\rho_1} & \frac{Ghl\partial_x + lEh\partial_x}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Gh\partial_x}{\rho_2} & \frac{EI\partial_x^2 - Gh}{\rho_2} & -\frac{Ghl}{\rho_2} & 0 & -\frac{a_1(x)}{\rho_2} & 0 \\ \frac{-Ehl\partial_x - lGh\partial_x}{\rho_1} & -\frac{lGh}{\rho_1} & \frac{Eh\partial_x^2 - l^2 Gh}{\rho_1} & 0 & 0 & -\frac{a_2(x)}{\rho_1} \end{pmatrix}$$

$A_j, j = 1, 2$ correspondiendo a las condiciones de frontera (1.5) y (1.6) respectivamente. Utilizando la definición de la energía, definimos los espacios de fase $\mathcal{H}_j, j = 1, 2$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= (H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 \\ \mathcal{H}_2 &= H_0^1(\Omega) \times (H_*^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \times (L_*^2(\Omega))^2 \end{aligned}$$

donde:

$$L_*^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}$$

$$H_*^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}$$

$$\Omega = [0, L]$$

Equipamos a estos espacios con el producto interno que induce la norma de la energía.

Sea $\begin{cases} U^1 = (\varphi^1, \psi^1, \omega^1, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\psi}^1, \tilde{\omega}^1) \\ U^2 = (\varphi^2, \psi^2, \omega^2, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^2, \tilde{\omega}^2) \end{cases}$, definimos el producto interno,

$$(U^1, U^2)_{\mathcal{H}_1} = \rho_1(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2) + \rho_2(\tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2) + \rho_1(\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2) + EI(\psi_x^1, \psi_x^2) \\ + Gh(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1, \varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) + Eh(\omega_x^1 - l\varphi^1, \omega_x^2 - l\varphi^2)$$

$$(U^1, U^2)_{\mathcal{H}_1} = \int_0^L [\rho_1 \tilde{\varphi}^1 \tilde{\varphi}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}^1 \tilde{\psi}^2 + \rho_1 \tilde{\omega}^1 \tilde{\omega}^2 + EI \psi_x^1 \psi_x^2 \\ + Gh(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)(\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) + Eh(\omega_x^1 - l\varphi^1)(\omega_x^2 - l\varphi^2)] dx$$

Y para $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in \mathcal{H}_j, j = 1, 2$ definimos su norma inducida como,

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2 + EI \|\psi_x\|^2 + Gh \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + Eh \|\omega_x - l\varphi\|^2$$

Donde $\|\cdot\|$ denota la norma en $L^2(\Omega)$, observamos que con esta norma, el espacio \mathcal{H}_j es un espacio de Hilbert.

Proposición 3.1: La norma $\|U\|_{\mathcal{H}_j}$ es equivalente a la norma,

$$\|U\|_1^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|z\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + \|\omega_x - l\varphi\|^2$$

Prueba: **Revisar [26]**

■

Ahora faltaría definir completamente el operador A , para eso debemos establecer formalmente su dominio como un conjunto sobre el cual este bien definido, al que llamaremos **Espacio de Fase**, es decir,

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H} : AU \in \mathcal{H}\}$$

Ahora, como

$$A_j U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}v \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}z \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

tenemos

$$\begin{cases} D(A_1) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3 \\ D(A_2) = \left\{ U \in \mathcal{H}_2 : \begin{array}{l} \varphi \in H_0^1 \cap H^2 \\ \psi, \omega \in H_*^1 \cap H^2 \\ u, \psi_x, \omega_x \in H_0^1 \\ v, z \in H_*^1 \end{array} \right\} \end{cases}$$

Aquí y en adelante asumiremos $l \neq \frac{n\pi}{L} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ cuando $j = 2$

Teorema 3.2: El operador A_j genera un C_0 – semigrupo $\{S_j(t)\}_{t \geq 0}$ de contracciones sobre \mathcal{H}_j para $j = 1, 2$.

Prueba:

La prueba lo desarrollaremos mediante cuatro afirmaciones, y utilizaremos al final el teorema 2.79

Afirmación 1: A es disipativo

Es decir, veamos que $Re(AU, U) \leq 0$

Sea $\begin{cases} U^1 = (\varphi^1, \psi^1, \omega^1, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\psi}^1, \tilde{\omega}^1) \\ U^2 = (\varphi^2, \psi^2, \omega^2, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^2, \tilde{\omega}^2) \end{cases}$, y el producto interno,

$$(U^1, U^2)_{\mathbb{H}_1} = \rho_1(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2) + \rho_2(\tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2) + \rho_1(\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2) + EI(\psi_x^1, \psi_x^2) + Gh(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1, \varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) + Eh(\omega_x^1 - l\varphi^1, \omega_x^2 - l\varphi^2)$$

$$(U^1, U^2)_{\mathbb{H}_1} = \int_0^L [\rho_1 \tilde{\varphi}^1 \tilde{\varphi}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}^1 \tilde{\psi}^2 + \rho_1 \tilde{\omega}^1 \tilde{\omega}^2 + EI \psi_x^1 \psi_x^2 + Gh(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)(\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) + Eh(\omega_x^1 - l\varphi^1)(\omega_x^2 - l\varphi^2)] dx$$

$$Re(AU, U) = (AU, U)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}\tilde{\psi} \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}\tilde{\omega} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \\ \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} \right) \\
&= \int_0^L \left[\rho_1 \tilde{\varphi} \left(\frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \right) \right. \\
&\quad + \rho_2 \tilde{\psi} \left(\frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}\tilde{\psi} \right) \\
&\quad + \rho_1 \tilde{\omega} \left(\frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}\tilde{\omega} \right) + EI \tilde{\psi}_x \psi_x \\
&\quad \left. + Gh(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})(\varphi_x + \psi + l\omega) + Eh(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})(\omega_x - l\varphi) \right] dx \\
&= \int_0^L \left[\underbrace{\rho_1 \varphi_t \left(\frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \right)}_{**} \right. \\
&\quad + \underbrace{\rho_2 \psi_t \left(\frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}\psi_t \right)}_{\#\#} \\
&\quad + \underbrace{\rho_1 \omega_t \left(\frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}\omega_t \right)}_{\$\$} + EI \psi_{tx} \psi_x \\
&\quad \left. + Gh(\varphi_{tx} + \psi_t + l\omega_t)(\varphi_x + \psi + l\omega) + Eh(\omega_{tx} - l\varphi_t)(\omega_x - l\varphi) \right] dx
\end{aligned}$$

Integrando por separado:

$$\begin{aligned}
\circ \quad ** &= \int_0^L \rho_1 \varphi_t \left(\frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \right) dx = \\
&= \int_0^L (Gh\varphi_t(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi)) dx \\
&= \int_0^L (Gh\varphi_t(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x)) dx + \int_0^L (lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi)) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Gh\varphi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L Gh\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \int_0^L (lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi)) dx \\
&= Gh\varphi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L Gh\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \int_0^L (lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi)) dx \\
&= - \int_0^L Gh\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \int_0^L lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi) dx \\
\circ \quad \#\# &= \int_0^L \rho_2 \psi_t \left(\frac{EI}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2} (\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2} \psi_t \right) dx = \\
&= \int_0^L (EI\psi_t \psi_{xx} - Gh\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_1(x)\psi_t \psi_t) dx \\
&= \int_0^L (EI\psi_t \psi_{xx} - Gh\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_1(x)\psi_t \psi_t) dx \\
&= EI\psi_t \psi_x|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L EI\psi_{tx} \psi_x dx - \int_0^L Gh\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \int_0^L a_1(x)\psi_t \psi_t dx \\
&= - \int_0^L EI\psi_{tx} \psi_x dx - \int_0^L Gh\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \int_0^L a_1(x)\psi_t \psi_t dx \\
\circ \quad \$\$ &= \int_0^L \rho_1 \omega_t \left(\frac{Eh}{\rho_1} (\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1} (\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1} \omega_t \right) dx = \\
&= \int_0^L (Eh\omega_t(\omega_{xx} - l\varphi_x) - lGh\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_2(x)\omega_t \omega_t) dx \\
&= \int_0^L Eh\omega_t(\omega_{xx} - l\varphi_x) dx - \int_0^L lGh\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \int_0^L a_2(x)\omega_t \omega_t dx \\
&= Eh\omega_t(\omega_x - l\varphi)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L Eh\omega_{tx}(\omega_x - l\varphi) dx - \int_0^L lGh\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
&\quad - \int_0^L a_2(x)\omega_t \omega_t dx \\
&= - \int_0^L Eh\omega_{tx}(\omega_x - l\varphi) dx - \int_0^L lGh\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \int_0^L a_2(x)\omega_t \omega_t dx
\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
Re(AU, U) &= - \underbrace{\int_0^L Gh\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx}_{\text{###}} + \underbrace{\int_0^L lEh\varphi_t(\omega_x - l\varphi) dx}_{\text{***}} \\
&\quad - \underbrace{\int_0^L El\psi_{tx}\psi_x dx}_{\text{$$$}} - \underbrace{\int_0^L Gh\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx}_{\text{###}} - \int_0^L a_1(x)\psi_t\psi_t dx \\
&\quad - \underbrace{\int_0^L Eh\omega_{tx}(\omega_x - l\varphi) dx}_{\text{***}} - \underbrace{\int_0^L lGh\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx}_{\text{###}} - \int_0^L a_2(x)\omega_t\omega_t dx \\
&\quad + \int_0^L \left[\underbrace{El\psi_{tx}\psi_x}_{\text{$$$}} + \underbrace{Gh(\varphi_{tx} + \psi_t + l\omega_t)(\varphi_x + \psi + l\omega)}_{\text{###}} \right. \\
&\quad \quad \left. + \underbrace{Eh(\omega_{tx} - l\varphi_t)(\omega_x - l\varphi)}_{\text{***}} \right] dx \\
&= - \int_0^L a_1(x)\psi_t\psi_t dx - \int_0^L a_2(x)\omega_t\omega_t dx = - \int_0^L (a_1(x)|\psi_t|^2 + a_2(x)|\omega_t|^2) dx \leq 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Re(A_j U, U) &= - \int_0^L (a_1(x)|\psi_t|^2 + a_2(x)|\omega_t|^2) dx \leq 0 \\
&\quad \therefore Re(A_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por lo tanto, A_j es un operador disipativo.

El siguiente paso es demostrar que $0 \in \rho(A_j)$, es decir, que el operador A_j es invertible y que su inversa $A_j^{-1}: \mathcal{H}_j \rightarrow D(A_j)$ es acotada.

Afirmación 2: A es invertible

Vamos a probar que para cualquier $F = (f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}) \in \mathcal{H}$, existe un único $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(A)$ tal que $AU = F$.

Resolvemos la ecuación:

$$A_j(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)' = (f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h})' \tag{3.5}$$

Luego,

$$A_j U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}v \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \tilde{f} \\ \tilde{g} \\ \tilde{h} \end{pmatrix}$$

De las primeras tres ecuaciones de (3.5) tenemos,

$$u = f, \quad v = g, \quad z = h$$

$$\text{También} \begin{cases} \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) = \tilde{f} \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}v = \tilde{g} \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}z = \tilde{h} \end{cases}$$

Multiplicando estas tres ecuaciones por $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}$ respectivamente, usando Green, tenemos:

$$\begin{cases} \langle Gh(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x), \tilde{\varphi} \rangle + \langle lEh(\omega_x - l\varphi), \tilde{\varphi} \rangle = \langle \rho_1 \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle \\ \langle EI\psi_{xx}, \tilde{\psi} \rangle - \langle Gh(\varphi_x + \psi + l\omega), \tilde{\psi} \rangle - \langle a_1(x)v, \tilde{\psi} \rangle = \langle \rho_2 \tilde{g}, \tilde{\psi} \rangle \\ \langle Eh(\omega_{xx} - l\varphi_x), \tilde{\omega} \rangle - \langle lGh(\varphi_x + \psi + l\omega), \tilde{\omega} \rangle - \langle a_2(x)z, \tilde{\omega} \rangle = \langle \rho_1 \tilde{h}, \tilde{\omega} \rangle \\ -Gh\langle (\varphi_x + \psi + l\omega), \tilde{\varphi}_x \rangle - Eh\langle (\omega_x - l\varphi), -l\tilde{\varphi} \rangle = \langle \rho_1 \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle \\ -EI\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle - Gh\langle (\varphi_x + \psi + l\omega), \tilde{\psi} \rangle - \langle a_1(x)v, \tilde{\psi} \rangle = \langle \rho_2 \tilde{g}, \tilde{\psi} \rangle \\ -Eh\langle (\omega_x - l\varphi), \tilde{\omega}_x \rangle - Gh\langle (\varphi_x + \psi + l\omega), l\tilde{\omega} \rangle - \langle a_2(x)z, \tilde{\omega} \rangle = \langle \rho_1 \tilde{h}, \tilde{\omega} \rangle \end{cases}$$

Sumando las tres ecuaciones, tenemos,

$$\begin{cases} -Gh\langle \varphi_x + \psi + l\omega, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega} \rangle - Eh\langle \omega_x - l\varphi, \tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi} \rangle - EI\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle \\ -\langle a_1(x)v, \tilde{\psi} \rangle - \langle a_2(x)z, \tilde{\omega} \rangle = \langle \rho_1 \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle + \langle \rho_2 \tilde{g}, \tilde{\psi} \rangle + \langle \rho_1 \tilde{h}, \tilde{\omega} \rangle \\ Gh\langle \varphi_x + \psi + l\omega, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega} \rangle + Eh\langle \omega_x - l\varphi, \tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi} \rangle + EI\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle = \\ = \langle -\rho_1 \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle + \langle -\rho_2 \tilde{g} - a_1(x)v, \tilde{\psi} \rangle + \langle -\rho_1 \tilde{h} - a_2(x)z, \tilde{\omega} \rangle \end{cases} \quad (3.6)$$

Se define la forma sesquilineal: $a(\cdot, \cdot): (H_0^1(0, L))^3 \times (H_0^1(0, L))^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$a\left((\varphi, \psi, \omega), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega})\right) = \begin{cases} Gh\langle \varphi_x + \psi + l\omega, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega} \rangle + \\ + Eh\langle \omega_x - l\varphi, \tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi} \rangle + EI\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle \end{cases}$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en L^2

$a(\cdot, \cdot)$ es $(H_0^1(0, L))^3$ –coerciva, simétrico y continúa.

- $a(\cdot, \cdot)$ es simétrico, se verifica por definición de $\langle \cdot, \cdot \rangle$

- $a(.,.)$ es continuo por definición de $\langle ., . \rangle$, o usar también las equivalencias de $\|.\|_1^2$ y $\|.\|_{\mathcal{H}_j}^2$
- $a(.,.)$ es $(H_0^1(0, L))^3$ – coerciva, por demostrar,

$$a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) \geq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|\omega\|_{H_0^1}^2 \right)$$

En efecto, $\forall (\varphi, \psi, \omega) \in (H_0^1(0, L))^3$, luego

$$a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) = Gh\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + Eh\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + EI\|\psi_x\|_{L^2}^2$$

Como $\|.\|_1^2$ y $\|.\|_{\mathcal{H}_j}^2$ son equivalentes, existen $c, \tilde{c} > 0$ tal que $\tilde{c}\|.\|_1 \leq \|.\|_{\mathcal{H}_j} \leq c\|.\|_1$, luego:

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) &= Gh\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + Eh\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + EI\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \\ &\quad + (\rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \rho_1\|z\|^2) - (\rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \rho_1\|z\|^2) \\ a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) &= \|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_{\mathbb{H}_j}^2 - (\rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \rho_1\|z\|^2) \\ a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) &\geq \tilde{c}^2\|(\varphi, \psi, \omega, u, v, z)\|_1^2 - (\rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \rho_1\|z\|^2) \\ &= \tilde{c}^2(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|z\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2) \\ &\quad - (\rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \rho_1\|z\|^2) \\ &= (\tilde{c}^2 - \rho_1)\|u\|^2 + (\tilde{c}^2 - \rho_2)\|v\|^2 + (\tilde{c}^2 - \rho_1)\|z\|^2 \\ &\quad + \tilde{c}^2(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2) \end{aligned}$$

Sea $(\varphi, \psi, \omega) = (u, v, z)$, $C = \min\{\tilde{c}^2 - \rho_1, \tilde{c}^2 - \rho_2, \tilde{c}^2\}$ tal que

$$\tilde{c}^2 - \rho_1, \tilde{c}^2 - \rho_2 > 0$$

$$a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) \geq C(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\omega\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2)$$

$$a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) \geq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|\omega\|_{H_0^1}^2 \right)$$

Por tanto, $a(.,.)$ es coerciva en $(H_0^1(0, L))^3$.

Definamos el operador

$$T \in \left[(H_0^1(0, L))^3 \right]^* = \left\{ F: (H_0^1(0, L))^3 \rightarrow \mathbb{R}: F \text{ es una transformación lineal} \right\}$$

$T = T_1 \times T_2 \times T_3: (H_0^1(0, L))^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definido por,

$$\langle T, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \rangle = \langle T_1, \tilde{\varphi} \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + \langle T_2, \tilde{\psi} \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + \langle T_3, \tilde{\omega} \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

$$\langle T, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \rangle = \langle -\rho_1 \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle + \langle -\rho_2 \tilde{g} - a_1(x)v, \tilde{\psi} \rangle + \langle -\rho_1 \tilde{h} - a_2(x)z, \tilde{\omega} \rangle \text{ de (3.6)}$$

Dado que $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} \in L^2$, $H_0^1 \hookrightarrow L^2$, $L^2 = [L^2]^* \hookrightarrow [H_0^1]^* = H^{-1}$

Se tiene que T esta bien definida, por tanto $T \in \left[(H_0^1(0, L))^3 \right]^*$

$$\text{Tenemos el problema} \left| \begin{array}{l} a((\varphi, \psi, \omega), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega})) = \langle T, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \rangle \\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \in (H_0^1(0, L))^3 \end{array} \right.$$

Entonces tenemos: $(H_0^1(0, L))^3$ es Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ es $(H_0^1(0, L))^3$ sesquilineal, continua y coerciva y $T \in [(H_0^1(0, L))^3]^*$, entonces por el Teorema de Lax – Milgram, (φ, ψ, ω) es único para cualquier $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}) \in (H_0^1(0, L))^3$, así A es invertible.

Afirmación 3: El operador $A^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow D(A)$ es acotado.

Por demostrar que $\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$

Dado $F = (f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}) \in \mathcal{H}$, existe $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) \in D(A)$ tal que $AU = F$. Luego tenemos

$$A_j U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}v \\ \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \tilde{f} \\ \tilde{g} \\ \tilde{h} \end{pmatrix}$$

De donde,

$$\left| \begin{array}{l} u = f \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left| \begin{array}{l} v = g \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left| \begin{array}{l} z = h \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) = \tilde{f} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_1(x)}{\rho_2}v = \tilde{g} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{a_2(x)}{\rho_1}z = \tilde{h} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.10), (3.11) y (3.12) con $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ y $\bar{\omega}$ que pertenecen a H_0^1 respectivamente

$$\left| \begin{array}{l} Gh\bar{\varphi}(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) + lEh\bar{\varphi}(\omega_x - l\varphi) = \rho_1\bar{\varphi}\tilde{f} \\ EI\bar{\psi}\psi_{xx} - Gh\bar{\psi}(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_1\bar{\psi}v = \rho_2\bar{\psi}\tilde{g} \\ Eh\bar{\omega}(\omega_{xx} - l\varphi_x) - lGh\bar{\omega}(\varphi_x + \psi + l\omega) - a_2\bar{\omega}z = \rho_1\bar{\omega}\tilde{h} \end{array} \right.$$

Sumando e integrando de 0 a L, tenemos,

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [Gh|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh|\omega_x - l\varphi|^2 + EI|\psi_x|^2] dx = \\
& = \int_0^L [\rho_1 \bar{\varphi} \tilde{f} + \rho_2 \bar{\psi} \tilde{g} + \rho_1 \bar{\omega} \tilde{h} + a_1 \bar{\psi} v + a_2 \bar{\omega} z] dx \\
& \leq \rho_1 \|\bar{\varphi}\| \|\tilde{f}\| + \rho_2 \|\bar{\psi}\| \|\tilde{g}\| + \rho_1 \|\bar{\omega}\| \|\tilde{h}\| + \int_0^L (a_1 \bar{\psi} v + a_2 \bar{\omega} z) dx \\
& \leq \rho_1 \|\bar{\varphi}\| \|\tilde{f}\| + \rho_2 \|\bar{\psi}\| \|\tilde{g}\| + \rho_1 \|\bar{\omega}\| \|\tilde{h}\| + \underbrace{\max \left\{ \int_0^L a_1 dx, \int_0^L a_2 dx \right\}}_{C_1} \int_0^L (\bar{\psi} g + \bar{\omega} h) dx \\
& \leq \rho_1 \|\bar{\varphi}\| \|\tilde{f}\| + \rho_2 \|\bar{\psi}\| \|\tilde{g}\| + \rho_1 \|\bar{\omega}\| \|\tilde{h}\| + C_1 (\|\bar{\psi}\| \|g\| + \|\bar{\omega}\| \|h\|) \\
& \leq \rho_1 \|\bar{\varphi}\| \|\tilde{f}\| + \rho_2 \|\bar{\psi}\| \|\tilde{g}\| + \rho_1 \|\bar{\omega}\| \|\tilde{h}\| + C_1 (\|\bar{\psi}\| \|g\| + \|\bar{\omega}\| \|h\|) \\
& \leq C_2 \|F\|_{\mathcal{H}} (\|\bar{\varphi}\| + \|\bar{\psi}\| + \|\bar{\omega}\| + \|\bar{\psi}\| + \|\bar{\omega}\|) \\
& \leq C_3 \|F\|_{\mathcal{H}} (\|\varphi\| + \|\psi\| + \|\omega\|) \\
& \leq C_3 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_1 \\
& \leq C_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

entonces,

$$\int_0^L [Gh|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh|\omega_x - l\varphi|^2 + EI|\psi_x|^2] dx \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \quad (3.13)$$

Por otro lado, tenemos de (3.7), (3.8) y (3.9) respectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \rho_1 |u|^2 dx &= \int_0^L \rho_1 |f|^2 dx \\
\int_0^L \rho_2 |v|^2 dx &= \int_0^L \rho_2 |g|^2 dx \\
\int_0^L \rho_1 |z|^2 dx &= \int_0^L \rho_1 |h|^2 dx
\end{aligned}$$

sumando lado a lado tenemos,

$$\int_0^L [\rho_1 |u|^2 + \rho_2 |v|^2 + \rho_1 |z|^2] dx = \int_0^L [\rho_1 |f|^2 + \rho_2 |g|^2 + \rho_1 |h|^2] dx \leq C_5 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.14)$$

entonces, de (3.13) y (3.14) se obtiene,

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L [Gh|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + Eh|\omega_x - l\varphi|^2 + EI|\psi_x|^2 + \rho_1|u|^2 + \rho_2|v|^2 + \rho_1|z|^2] dx \\ &\leq (C_4\|F\|_{\mathcal{H}})\|U\|_{\mathcal{H}} + C_5\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{(C_4\|F\|_{\mathcal{H}})^2}{2} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^2}{2} + C_5\|F\|_{\mathcal{H}}^2\end{aligned}$$

Así se concluye que, $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (C_4^2 + 2C_5)\|F\|_{\mathcal{H}}^2$

Haciendo $C = (C_4^2 + 2C_5)^{1/2}$ tenemos que, $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$

Por lo tanto $A^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow D(A)$ es acotado.

De las afirmaciones 2 y 3 se tiene que $\mathbf{0} \in \rho(A)$

Afirmación 4: $D(A_j)$ es denso en \mathcal{H}_j

Como $\lambda_0 I - A = A(\lambda_0 A^{-1} - I)$, siendo la composición de dos operadores $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}_j$ y $(\lambda_0 A^{-1} - I): D(A) \rightarrow D(A)$, donde $\lambda_0 I - A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}_j$.

Siendo A^{-1} acotado, por el lema 2.78 tomando $B = \lambda_0 A^{-1}$ y $S = -I$, para $|\lambda_0| < 1/\|A^{-1}\|$, tenemos que $(\lambda_0 A^{-1} - I)$ es invertible, por lo tanto $(\lambda_0 I - A)$ también es invertible ya que es la composición de dos operadores invertibles. Luego $(\lambda_0 I - A)$ es sobreyectivo, para $\lambda_0 > 0$, en particular $\lambda_0 = 1$. Como A_j es disipativo y \mathcal{H}_j es Hilbert se sigue del teorema 2.80 que $D(A_j)$ es denso en \mathcal{H}_j .

Luego de las afirmaciones demostradas, se sigue del teorema 2.79 que A_j es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 en \mathcal{H}_j para $j = 1, 2$ que sería $S(t) = e^{-tA_j}, j \geq 0$.

■

Teorema 3.3 (Existencia y Unicidad): Para cualquier condición inicial $U_0 \in \mathcal{H}_j$, el problema (3.3) tiene una única solución débil, es decir,

$$U(t) \in C([0, \infty), \mathcal{H}_j)$$

Más aún, si $U_0 \in D(A_j)$, entonces $U(t)$ es una solución fuerte de (3.3)

$$\text{i.e. } U(t) \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j) \cap C([0, \infty), D(A_j))$$

Prueba:

El sistema (1.1) – (1.3) es equivalente al sistema
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = A_j U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

Como A_j es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 , entonces por el teorema 2.82, existe una única solución fuerte $U(t) = S(t)U_0$ del problema de Cauchy Abstracto tal que $U \in C([0, \infty); \mathcal{D}(A_j)) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H}_j)$

Además, si $U_0 \in \mathcal{D}(A_j^n)$, por la proposición 2.61 se obtiene que $U \in C^{n-k}([0, +\infty); \mathcal{D}(A_j^k)), \forall k = 0, 1, 2, \dots, n$

CAPITULO 4

Estabilidad Exponencial

Utilizaremos los resultados de Prüss que indica que un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es exponencialmente estable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:

- a. $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$
- b. $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \| (i\lambda I - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$

Proposición 4.1: El operador $A_j, j = 1, 2$ verifica la siguiente propiedad:

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A_j) \quad (4.1)$$

Prueba:

Como $(I - A)^{-1}$ es denso en \mathcal{H}_j , para verificar (4.1) es suficiente verificar que A_j no tiene valor propio imaginario puro para $j = 1, 2$

Suponemos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $i\lambda_0$ es un valor propio, y $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z)$ es la función propia normalizada ($\|U\| = 1$), i.e.

$$A_j U = i\lambda_0 U \quad (4.2)$$

De (3.4) y (4.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (a_1(x)|v|^2 + a_2(x)|z|^2) dx = \\ & = -\operatorname{Re} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}_j} = -\operatorname{Re} \langle i\lambda_0 U, U \rangle_{\mathcal{H}_j} = -\operatorname{Re} (i\lambda_0 \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Junto a la condición (1.4) implica que:

$$a_1(x)v = a_2(x)z = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } v = z = 0 \text{ en } \Theta \quad (4.4)$$

Recordar que $\psi, \omega \in H^2(0, L) \subset C^1([0, L])$ y usando (4.4) y (4.2) obtenemos:

$$\psi = \omega = 0 \text{ en } \Theta, \text{ y } \psi|_{0,L} = \omega|_{0,L} = 0 \quad (4.5)$$

Resulta que:

$$\psi_x = \omega_x = 0 \text{ en } \Theta, \text{ y } \psi_x|_{0,L} = \omega_x|_{0,L} = 0 \quad (4.6)$$

Entonces podemos escribir (4.2) como:

$$u = i\lambda_0 \varphi, \quad v = i\lambda_0 \psi, \quad z = i\lambda_0 \omega \quad (4.7)$$

$$Gh\varphi_{xx} + Gh\psi_x + (lGh + lEh)\omega_x + (\rho_1\lambda_0^2 - l^2Eh)\varphi = 0 \text{ en } \Omega \quad (4.8)$$

$$El\psi_{xx} - Gh\varphi_x + (\rho_2\lambda_0^2 - Gh)\psi - Ghl\omega = 0 \text{ en } \Omega \quad (4.9)$$

$$Eh\omega_{xx} - (Ehl + Ghl)\varphi_x - Ghl\psi + (\rho_1\lambda_0^2 - l^2Gh)\omega = 0 \text{ en } \Omega \quad (4.10)$$

$$\varphi|_{0,L} = \psi|_{0,L} = \psi_x|_{0,L} = \omega|_{0,L} = \omega_x|_{0,L} = 0 \quad (4.11)$$

Insertando (4.5) y (4.6) en (4.9) obtenemos:

$$\varphi_x = 0 \text{ en } \Theta \text{ y } \varphi_x|_{0,L} = 0 \quad (4.12)$$

Sea $X = (\varphi, \varphi_x, \psi, \psi_x, \omega, \omega_x)$, entonces podemos escribir los sistemas (4.8) – (4.12) como sigue:

$$X' = MX \text{ y } X(0) = X(L) = 0 \quad (4.13)$$

Donde M es una matriz cuadrada de orden 6, es fácil ver que el sistema diferencial ordinario (4.13) tiene solución única $X = 0$, esto combinado con (4.7), implica que $U = (\varphi, \psi, \omega, u, v, z) = 0$, esto es una contradicción, ya que $U \neq 0$

■

Tasa de Decaimiento Exponencial de la Energía: el caso de $\frac{Gh}{\rho_1} = \frac{EI}{\rho_2}$

En esta sección estableceremos la estabilidad uniforme de la ecuación (3.3)

Teorema 4.2: Si $\frac{Gh}{\rho_1} = \frac{EI}{\rho_2}$, entonces el semigrupo $S_j(t)$ es exponencialmente estable, i.e., existe una constante $M, \epsilon > 0$ independientes de U_0 tal que

$$\|S_j(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq M e^{-\epsilon t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, t \geq 0, j = 1, 2 \quad (4.14)$$

Prueba:

Aplicando el teorema 2.99 para verificar el decaimiento uniforme de la energía de (4.14) es suficiente demostrar:

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A_j) \quad (4.15)$$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda I - A_j)^{-1}\| < +\infty, j = 1, 2 \quad (4.16)$$

La condición (4.15) se verifico en la proposición 4.1. Estableceremos (4.16) por contradicción.

Suponemos que la condición (4.16) es falsa. Entonces existe una sucesión real (λ_n) y una sucesión $U^n = (\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n) \in D(A_j)$ tal que

$$|\lambda_n| \rightarrow +\infty \quad (4.17)$$

$$\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1, \forall n \quad (4.18)$$

$$(i\lambda_n I - A_j)U^n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n, f_5^n, f_6^n) \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H}_j, j = 1, 2 \quad (4.19)$$

i.e. en $H^1(0, L)$ tenemos la siguiente convergencia:

$$i\lambda_n \varphi^n - u^n = f_1^n \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

$$i\lambda_n \psi^n - v^n = f_2^n \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

$$i\lambda_n \omega^n - z^n = f_3^n \rightarrow 0 \quad (4.22)$$

luego en $L^2(0, L)$ tenemos la siguiente convergencia:

$$i\lambda_n u^n - \frac{Gh}{\rho_1}(\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l\omega_x^n) - \frac{lEh}{\rho_1}(\omega_x^n - l\varphi^n) = f_4^n \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

$$i\lambda_n v^n - \frac{EI}{\rho_2}\psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2}(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{a_1(x)}{\rho_2}v^n = f_5^n \rightarrow 0 \quad (4.24)$$

$$i\lambda_n z^n - \frac{Eh}{\rho_1}(\omega_{xx}^n - l\varphi_x^n) + \frac{lGh}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{a_2(x)}{\rho_1}z^n = f_6^n \rightarrow 0 \quad (4.25)$$

A continuación, verificaremos la condición (4.16) encontrando una contradicción con (4.18), para mayor claridad dividamos la prueba en varios pasos:

Paso 1: Tomando el producto interno de (4.19) con U^n en \mathcal{H}_j obtenemos:

$$Re\langle (i\lambda_n I - A_j)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}_j} = \int_0^L (a_1(x)|v^n|^2 + a_2(x)|z^n|^2) dx \rightarrow 0 \quad (4.26)$$

Gracias a (1.4) deducimos que:

$$a_1 v^n, a_2 z^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y } v^n, z^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Theta) \quad (4.27)$$

Además, usando (4.18) vemos que u^n , v^n y z^n están limitados en $L^2(0, L)$. Luego tomando la suma del producto interno de (4.20) con $\rho_1 \overline{u^n}$, (4.21) con $\rho_2 \overline{v^n}$, (4.22) con $\rho_1 \overline{z^n}$ en $L^2(0, L)$, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & i\lambda_n \int_0^L \rho_1 \varphi^n \overline{u^n} dx + i\lambda_n \int_0^L \rho_2 \psi^n \overline{v^n} dx + i\lambda_n \int_0^L \rho_1 \omega^n \overline{z^n} dx \\ & - \int_0^L (\rho_1 |u^n|^2 + \rho_2 |v^n|^2 + \rho_1 |z^n|^2) dx \end{aligned} \right\} \rightarrow 0 \quad (4.28)$$

Del mismo modo, usando (4.18) y la desigualdad de Poincaré tenemos que φ^n , ψ^n y ω^n son limitados en $L^2(0, L)$. Observando (4.26) y tomando la suma del producto interno de (4.23) con $\rho_1 \overline{\varphi^n}$, (4.24) con $\rho_2 \overline{\psi^n}$, (4.25) con $\rho_1 \overline{\omega^n}$ en $L^2(0, L)$, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & i\lambda_n \int_0^L \rho_1 u^n \overline{\varphi^n} dx + i\lambda_n \int_0^L \rho_2 v^n \overline{\psi^n} dx + i\lambda_n \int_0^L \rho_1 z^n \overline{\omega^n} dx \\ & + \int_0^L (EI |\psi_{xx}^n|^2 + Gh |\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh |\omega_x^n - l\varphi^n|^2) dx \end{aligned} \right\} \rightarrow 0 \quad (4.29)$$

Finalmente, usando el valor real de la suma de (4.28) y (4.29) en (4.18) obtenemos

$$\int_0^L (EI|\psi_{xx}^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \quad (4.30)$$

y

$$\int_0^L (\rho_1|u^n|^2 + \rho_2|v^n|^2 + \rho_1|z^n|^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

Entonces, para obtener una contradicción con (4.18), solo necesitamos deducir que (4.30) tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$, eso haría que $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} \rightarrow 0$ que contradice el hecho que $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1$

Paso 2: Aplicando (4.27) en (4.21) y (4.22) respectivamente, obtenemos

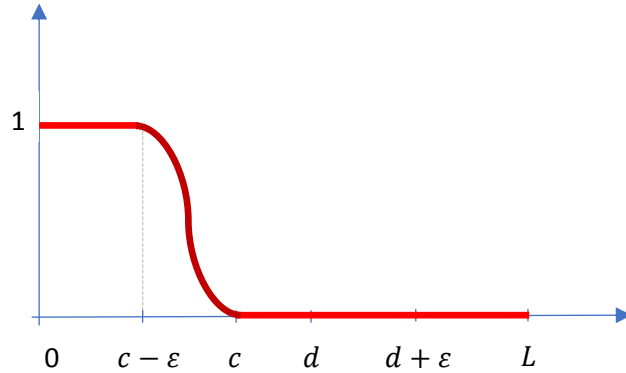
$$\lambda_n \psi^n, \lambda_n \omega^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Theta) \quad (4.32)$$

De (4.18) vemos que u^n , v^n y z^n están limitados en $L^2(0, L)$. Luego usando (4.20) – (4.22) y el hecho que $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$\varphi^n, \psi^n, \omega^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, L) \quad (4.33)$$

Paso 3: Ahora y después, designamos un numero ε real positivo fijo tal que $c - \varepsilon > 0$ y $d + \varepsilon < L$. Definimos la función de corte $\xi \in C^1([0, L])$ por

$$\xi \equiv \begin{cases} 1, & \text{en } [0, c - \varepsilon] \\ 0, & \text{en } [c, L] \end{cases}, \text{ y } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ en otra parte}$$



Tomando el producto interno de (4.24) con $\rho_2 \xi \bar{\psi}^n$ en $L^2(0, L)$ e integrando por partes, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_0^c \rho_2 \xi \lambda_n v^n \bar{\psi}^n dx + EI \int_0^c \xi |\psi_x^n|^2 dx + EI \int_0^c \xi \psi_x^n |\bar{\psi}^n| dx \right. \\ & \quad \left. - EI [\xi \psi_x^n \bar{\psi}^n]_{x=0}^{x=L} + Gh \int_0^c (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \bar{\psi}^n dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^c a_1(x) v^n \xi \bar{\psi}^n dx \right\} = Re \left\{ \int_0^c \rho_2 \xi f_5^n \bar{\psi}^n dx \right\} \end{aligned} \right| \quad (4.34)$$

Es fácil ver que el término en el lado derecho de (4.34) converge a cero. Además, el límite de los términos en (4.34) desaparece debido a la condición de frontera en ψ^n para

$j = 1$ y ψ_x^n para $j = 2$. Además ψ_x^n , $\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n$ y v^n son los límites en $L^2(0, L)$ debido a (3.5). Entonces, usando (4.27), (4.32) y (4.33) en (4.34), obtenemos

$$\int_0^{c-\varepsilon} |\psi_x^n|^2 dx \rightarrow 0$$

De la misma manera, mostramos que

$$\int_{d+\varepsilon}^L |\psi_x^n|^2 dx \rightarrow 0$$

Entonces, obtenemos

$$\int_0^{c-\varepsilon} |\psi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ y } \int_{d+\varepsilon}^L |\psi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.35)$$

Similar, usando (4.25), podemos establecer la siguiente convergencia

$$\int_0^{c-\varepsilon} |\omega_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ y } \int_{d+\varepsilon}^L |\omega_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.36)$$

Paso 4:

- (i) Eliminando u^n en (4.23) por (4.20), aplicando el producto punto en la ecuación con $\rho_1 x \overline{\varphi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, y luego integramos por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 dx - \frac{\rho_1}{2} [x |\lambda_n \varphi^n|^2]_{x=0}^{x=L} + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 dx \right. \\ & \quad - \frac{Gh}{2} L |\varphi_x^n(L)|^2 - Gh \int_0^L x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} dx - lGh \int_0^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} dx \\ & \quad \left. - lEh \int_0^L x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} dx - \frac{l^2 Eh}{2} \int_0^L |\varphi^n|^2 dx + \frac{l^2 Eh}{2} [x |\varphi^n|^2]_{x=0}^{x=L} \right\} \\ & = Re \left\{ \rho_1 \int_0^L f_4^n x \overline{\varphi_x^n} dx + i \rho_1 \int_0^L f_1^n \lambda_n x \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

Primero, es fácil ver

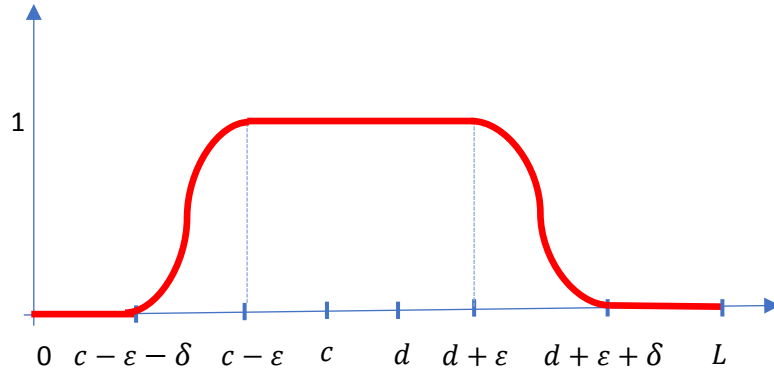
$$\int_0^L f_1^n \lambda_n x \overline{\varphi_x^n} dx = - \int_0^L f_1^n \lambda_n \overline{\varphi^n} dx - \int_0^L (f_1^n)_x \lambda_n x \overline{\varphi^n} dx + [f_1^n \lambda_n x \overline{\varphi^n}]_{x=0}^{x=L} \quad (4.38)$$

El límite de los términos en (4.38) desaparece debido a la condición de frontera en φ^n . Además, f_1^n converge a cero en $H_0^1(0, L)$ y $\lambda_n \varphi^n$ es cerrado en $L^2(0, L)$ debido a (4.20), entonces (4.38) tiende a cero cuando $n \rightarrow +\infty$. Además, f_4^n converge a 0 y φ_x^n es cerrado en $L^2(0, L)$ debido a (4.18); esto implica que el término en el lado derecho de (4.37) converge a 0. Siguiendo, el límite del término en (4.37) desaparece debido a la condición de frontera en φ^n . Entonces, usando (4.33), (4.35) y (4.36) en (4.37), obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 dx + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 dx - \frac{Gh}{2} L |\varphi_x^n(L)|^2 \\ & + Re \left\{ -Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} dx - lGh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} dx \right. \\ & \quad \left. - lEh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

(ii) Dejar $\delta > 0$ tal que $c - \varepsilon - \delta > 0$ y $d + \varepsilon + \delta < L$. Definimos la función de corte $\zeta \in C^1([0, L])$ por

$$\zeta \equiv \begin{cases} 1 & \text{en } [c - \varepsilon, d + \varepsilon] \\ 0 & \text{en } [0, c - \varepsilon - \delta] \cup [d + \varepsilon + \delta, L] \end{cases}, \text{ y } 0 \leq \zeta \leq 1$$



Ahora, eliminando v^n en (4.24) por (4.21), aplicando el producto punto en la ecuación resultante con $\rho_2 \zeta x \overline{\psi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, y entonces integramos por partes y obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (x\zeta)_x |\lambda_n \psi^n|^2 dx + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} (x\zeta)_x |\psi_x^n|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + Gh \int_{c-\varepsilon-\delta}^{d+\varepsilon+\delta} x \zeta \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} dx + Gh \int_0^L (\psi^n + l\omega^n) x \zeta \overline{\psi_x^n} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^L a_1(x) x v^n \zeta \overline{\psi_x^n} dx \right\} = Re \left\{ \rho_2 \int_0^L x f_5^n \zeta \overline{\psi_x^n} dx + i \rho_2 \int_0^L f_2^n \lambda_n x \zeta \overline{\psi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.40)$$

De (4.21) y (4.24), las sucesiones f_2^n y f_5^n convergen a 0 en $H^1(0, L)$ y $L^2(0, L)$ respectivamente. Ya que ψ_x^n y $\lambda_n \psi^n$ están limitados en $L^2(0, L)$ debido a (4.18) y (4.21) y la función $x\zeta$ desaparece en el limite entonces, por una manera similar a (4.38), el termino en el lado derecho de (4.40) converge a 0. Finalmente, usando (4.26), (4.32) y (4.35) en (4.40), obtenemos

$$\frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \psi^n|^2 dx + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\psi_x^n|^2 dx + Re \left\{ Gh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} dx \right\} \rightarrow 0 \quad (4.41)$$

(iii) Del mismo modo, eliminando z^n en (4.25) por (4.22), aplicando el producto punto en la ecuación resultante con $\rho_1 \zeta x \overline{\omega_x^n}$ en $L^2(0, L)$, y entonces integramos por partes y obtenemos

$$\frac{\rho_1}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \omega^n|^2 dx + \frac{Eh}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\omega_x^n|^2 dx + \operatorname{Re} \left\{ lGh \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} x \varphi_x^n \overline{\omega_x^n} dx \right\} \rightarrow 0 \quad (4.42)$$

(iv) Luego tomando la suma de (4.39), (4.41) y (4.42), obtenemos

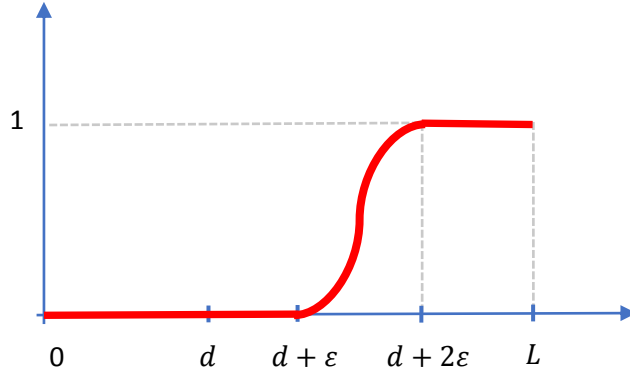
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\lambda_n \varphi^n|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \psi^n|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\lambda_n \omega^n|^2 dx \\ & \quad + \frac{Gh}{2} \int_0^L |\varphi_x^n|^2 dx - \frac{Gh}{2} L |\varphi_x^n(L)|^2 \\ & \quad + \frac{EI}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\psi_x^n|^2 dx + \frac{Eh}{2} \int_{c-\varepsilon}^{d+\varepsilon} |\omega_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (4.43)$$

Ahora, para encontrar la contradicción deseada, tenemos que mostrar que la secuencia numérica $\varphi_x^n(L)$ converge a 0.

Paso 5:

Considerar el caso $j = 1$. Definimos la función de corte $\chi \in C^1([0, L])$ por

$$\chi \equiv \begin{cases} 0, & \text{en } [0, d + \varepsilon] \\ 1, & \text{en } [d + 2\varepsilon, L] \end{cases} \text{ y } 0 \leq \chi \leq 1$$



Eliminando v^n en (4.25) por (4.21), tomando el producto interno de la ecuación resultante con $\chi \overline{\psi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, y entonces integrando por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\lambda_n \psi^n|^2 dx + \frac{EI}{2\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x |\psi_x^n|^2 dx - \frac{EI}{2\rho_2} |\psi_x^n(L)|^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \overline{\psi_x^n} dx + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L a_1(x) v^n \chi \overline{\psi_x^n} dx \right\} \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L f_5^n \chi \overline{\psi_x^n} dx + i \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_2^n \chi \overline{\psi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.44)$$

De (4.21) y (4.24), las sucesiones f_2^n y f_5^n convergen a 0 en $H^1(0, L)$ y $L^2(0, L)$ respectivamente. Ya que ψ_x^n y $\lambda_n \psi^n$ están limitados en $L^2(0, L)$ debido a (4.18) y (4.21) y ψ^n desaparece en el límite luego, por una manera similar de (4.38), el termino en el

lado derecho de (4.44) converge a 0. Además, $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$ y v^n son limitados en $L^2(0, L)$ debido a (4.18) entonces, usando (4.32) y (4.35) en (4.44), obtenemos

$$\psi_x^n(L) \rightarrow 0 \quad (4.45)$$

Paso 6:

- (i) Eliminando u^n en (4.23) por (4.20) y tomando el producto interno de la ecuación resultante $\chi\overline{\psi_x^n}$, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \varphi_x^n \overline{\psi^n} dx + \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \lambda_n \varphi^n \lambda_n \overline{\psi^n} dx - [\chi \lambda_n^2 \varphi^n \overline{\psi^n}]_{x=0}^{x=L} \right. \\ & + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \varphi_x^n \overline{\psi_x^n} dx + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx - \frac{Gh}{\rho_1} [\chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n}]_{x=0}^{x=L} \\ & - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} dx - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \omega_x^n \overline{\psi_x^n} dx + \frac{Ehl^2}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi^n \overline{\psi_x^n} dx \\ & \left. - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\overline{\psi_x^n}|^2 dx \right\} = Re \left\{ \int_0^L f_4^n \chi \overline{\psi_x^n} dx + i \int_0^L \lambda_n f_1^n \chi \overline{\psi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.46)$$

Primero, de una manera similar usada en (4.38) podemos mostrar que el término en el lado derecho de (4.46) converge a 0. A continuación, el primer termino de limite en (4.46) desaparece debido a la condición de frontera de φ^n y usando (4.43) deducimos que la sucesión $\varphi_x^n(L)$ es acotado, entonces usando (4.45) tenemos, para $j = 1$, $[\chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n}]_{x=0}^{x=L} \rightarrow 0$. Además, en el caso $j = 2$, tenemos $[\chi \varphi_x^n \overline{\psi_x^n}] = 0$ debido a la condición de frontera de ψ_x^n . Finalmente, la sucesión φ^n , φ_x^n y $\lambda_n \varphi^n$ es acotado en $L^2(0, L)$ debido a (4.18) y (4.20), entonces usando (4.32) y (4.35) en (4.46), obtenemos

$$Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \varphi_x^n \overline{\psi^n} dx + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \varphi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx \right\} \rightarrow 0 \quad (4.47)$$

- (ii) Eliminando v^n en (4.24) por (4.21) y aplicando el producto punto en la ecuación resultante con $\chi\overline{\varphi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi_x^n \overline{\varphi^n} dx - \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_{xx}^n dx + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} dx \right. \\ & + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n dx + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n dx \left. \right\} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 dx \\ & = Re \left\{ \int_0^L f_5^n \chi \overline{\varphi_x^n} dx + i \int_0^L \lambda_n f_2^n \chi \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.48)$$

Usando (4.38) deducimos que el termino en el lado derecho de (4.48) converge a 0. La sucesión φ_x^n es limitada en $L^2(0, L)$ debido a (4.18), entonces usando (4.27) y (4.33) en (4.48), obtenemos

$$Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^2 \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} dx - \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi_{xx}^n dx \right\} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.49)$$

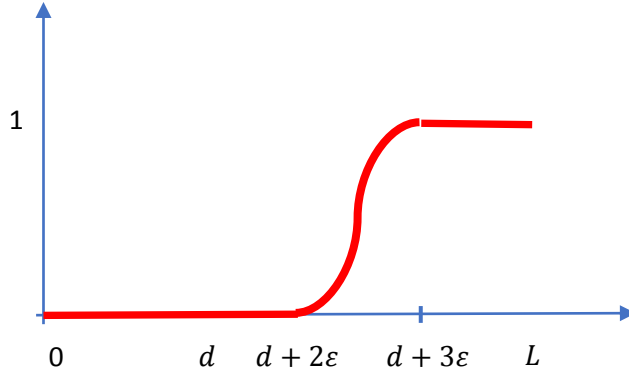
(iii) Entonces note que $\frac{Gh}{\rho_1} = \frac{EI}{\rho_2}$ y tomando la suma de (4.47) y (4.49), obtenemos

$$\int_{d+\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.50)$$

Paso 7:

Definimos la función de corte $\chi_1 \in C^2([0, L])$ por

$$\chi_1 \equiv \begin{cases} 0 & \text{en } [0, d + 2\varepsilon] \\ 1 & \text{en } [d + 3\varepsilon, L] \end{cases}, \text{ y } 0 \leq \chi_1 \leq 1$$



Eliminando u^n en (4.23) por (4.20), aplicando el producto punto en la ecuación resultante con $\chi_1 \overline{\varphi^n}$ en $L^2(0, L)$, y entonces integrando por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & - \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\lambda_n \varphi^n|^2 dx + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi_x^n|^2 dx - \frac{Gh}{2\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_{1,xx} |\varphi^n|^2 dx \\ & - \operatorname{Re} \left\{ + \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \psi_x^n \overline{\varphi^n} dx + \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x^n \overline{\varphi^n} dx + \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 \omega_x^n \overline{\varphi^n} dx \right\} \\ & + \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+2\varepsilon}^L \chi_1 |\varphi^n|^2 dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^L f_4^n \chi_1 \overline{\varphi^n} dx + i \int_0^L \lambda_n f_1^n \chi_1 \overline{\varphi^n} dx \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

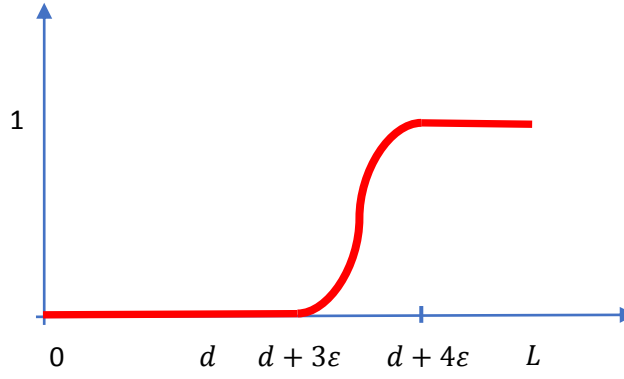
Es fácil ver que el término del lado derecho de (4.51) converge a 0. Entonces, al usar (4.33), (4.35) y (4.50) en (4.51), obtenemos

$$\int_{d+3\varepsilon}^L |\lambda_n \varphi^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (4.52)$$

Paso 8:

Definimos la función de corte $\chi_2 \in C^1([0, L])$ por

$$\chi_2 \equiv \begin{cases} 0 & \text{en } [0, d + 3\varepsilon] \\ 1 & \text{en } [d + 4\varepsilon, L] \end{cases}, \text{ y } 0 \leq \chi_2 \leq 1$$



Eliminando u^n en (4.23) por (4.20) y aplicando el producto punto de la ecuación resultante con $\chi_2 \overline{\varphi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_{2x} |\lambda_n \varphi^n|^2 dx - \frac{1}{2} [\chi_2 |\lambda_n \varphi^n|^2]_{x=0}^{x=L} + \frac{Gh}{2\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_{2x} |\varphi_x^n|^2 dx \right. \\ & \quad - \frac{Gh}{2\rho_1} [\chi_2 |\varphi_x^n|^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{Gh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \psi_x^n \overline{\varphi_x^n} dx - \frac{Ghl}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi^n} dx \\ & \quad \left. - \frac{Ehl}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \omega_x^n \overline{\varphi_x^n} dx + \frac{l^2 Eh}{\rho_1} \int_{d+3\varepsilon}^L \chi_2 \varphi^n \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \\ & = Re \left\{ \int_0^L f_4^n \chi_2 \overline{\varphi_x^n} dx + i \int_0^L \lambda_n f_1^n \chi_2 \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.53)$$

El límite del primer término en (4.53) desaparece debido a la condición de frontera en φ^n . Además, usando (4.38) deducimos que el termino en el lado derecho de (4.53) converge a 0. Entonces usando (4.33), (4.35), (4.36), (4.50) y (4.52) en (4.53) obtenemos

$$\varphi_x^n(L) \rightarrow 0 \quad (4.54)$$

Paso 9:

Insertando (4.35), (4.36) y (4.54) en (4.43) obtenemos

$$\varphi_x^n, \psi_x^n, \omega_x^n \rightarrow 0, \quad L^2(0, L)$$

Por consiguiente,

$$\|U^n\|_{\mathbb{H}_j} = \int_0^L (EI |\psi_x^n|^2 + Gh |\varphi_x^n + \psi^n + l \omega^n|^2 + Eh |\omega_x^n - l \varphi^n|^2) dx \rightarrow 0$$

Contradicción ya que $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1, \forall n$

Por lo tanto, obtenemos la contradicción con (4.18), con lo que la prueba está completa. ■

CAPITULO 5

Estabilidad Polinomial

Tasa de Decaimiento Polinomial de la Energía: el caso de $\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{El}{\rho_2}$

En este capítulo, consideremos el sistema (1.1) – (1.3) sujeto a la condición inicial (1.7) y para las condiciones de contorno (1.5) o (1.6) en el caso $v_1 \neq v_2$, es decir, $\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{El}{\rho_2}$. Sabemos que la energía $E(t)$ del sistema (1.1) – (1.3) y (1.5) decae exponencialmente cuando $v_1 = v_2$ como se vio en el capítulo 3. A continuación, estableceremos la tasa de decaimiento polinomial del sistema (1.1) – (1.3), (1.5) o (1.6), pero antes, veamos el siguiente teorema.

Teorema 5.1: si $\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{El}{\rho_2}$, entonces el sistema (1.1) – (1.3), sujeto a la condición de frontera (1.6), no es exponencialmente estable.

Prueba:

Basta demostrar la existencia de sucesiones $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty$, $\{V_n\} \subset D(A_2)$, tal que $(i\lambda_n I - A_2)V_n$ es acotado en \mathcal{H}_2 y $\lim_{n \rightarrow +\infty} |V_n| = +\infty$. Sea $F = (0, 0, 0, f_4, f_5, 0) \in \mathcal{H}_2$ con

$$f_4(x) = \text{sen}(\delta\lambda x), \quad f_5(x) = \text{cos}(\delta\lambda x), \text{ donde } \delta = \sqrt{\frac{\rho_1}{Gh}}, \quad \lambda = \frac{n\pi}{\delta L}. \quad n \in \mathbb{N}$$

Denotamos por $\beta = \frac{Eh}{\rho_1}$ y $\alpha = \frac{Gh}{\rho_2}$ y resolvemos las siguientes ecuaciones:

$$i\lambda\varphi - u = 0, \tag{5.1}$$

$$i\lambda\psi - v = 0, \tag{5.2}$$

$$i\lambda\omega - z = 0, \tag{5.3}$$

$$i\lambda u - v_1(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) - l\beta(\omega_x - l\varphi) = f_4, \tag{5.4}$$

$$i\lambda v - v_2\psi_{xx} + \alpha(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_5, \tag{5.5}$$

$$i\lambda z - \beta(\omega_{xx} - l\varphi_x) + lv_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \tag{5.6}$$

Eliminando u, v y z en (5.4) – (5.6) por (5.1) – (5.3), obtenemos

$$-\lambda^2\varphi - v_1(\varphi_{xx} + \psi_x + l\omega_x) - l\beta(\omega_x - l\varphi) = f_4, \tag{5.7}$$

$$-\lambda^2\psi - v_2\psi_{xx} + \alpha(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_5, \tag{5.8}$$

$$-\lambda^2\omega - \beta(\omega_{xx} - l\varphi_x) + lv_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \tag{5.9}$$

Esto puede ser resuelto por las

$$\varphi(x) = A\text{sen}(\delta\lambda x), \quad \psi(x) = B\text{cos}(\delta\lambda x), \quad \omega(x) = C\text{cos}(\delta\lambda x), \tag{5.10}$$

Donde A, B y C dependen de λ estando determinado. Darse cuenta que $v_1\delta^2 - 1 = 0$, e insertamos (5.10) dentro de (5.7) – (5.9), logramos esto

$$l^2\beta A + v_1\delta\lambda B + \delta l(v_1 + \beta)\lambda C = 1, \quad (5.11)$$

$$\alpha\delta\lambda A + [(v_2\delta^2 - 1)\lambda^2 + \alpha]B + \alpha C = 1, \quad (5.12)$$

$$\delta l(v_1 + \beta)\lambda A + lv_1B + [(\beta\delta^2 - 1)\lambda^2 + l^2v_1]C = 0, \quad (5.13)$$

Eliminando C en (4.11) y (4.12) por (4.13) obtenemos

$$Q_1(\lambda)A + Q_2(\lambda)B = 1, \quad (5.14)$$

$$Q_3(\lambda)A + Q_4(\lambda)B = 1, \quad (5.15)$$

Donde Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 son dados por

$$Q_1(\lambda) = l^2\beta - \frac{\delta^2 l^2 (v_1 + \beta)^2 \lambda^2}{(\beta\delta^2 - 1)\lambda^2 + l^2 v_1}, \quad Q_2(\lambda) = v_1\beta\lambda - \frac{\delta l^2 v_1 (v_1 + \beta)\lambda}{(\beta\delta^2 - 1)\lambda^2 + l^2 v_1}$$

$$Q_3(\lambda) = \alpha\delta\lambda - \frac{\alpha\delta l^2 (v_1 + \beta)\lambda}{(\beta\delta^2 - 1)\lambda^2 + l^2 v_1}, \quad Q_4(\lambda) = (v_2\delta^2 - 1)\lambda^2 + \alpha - \frac{\alpha l^2 v_1}{(\beta\delta^2 - 1)\lambda^2 + l^2 v_1}$$

Deducimos

$$A = \frac{Q_4 - Q_2}{Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3}, \quad B = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3}$$

Ya que $G = \frac{E}{2(1+v)}$, donde $v \in (0, 1/2)$, entonces $\beta\delta^2 - 1 \neq 0$ y deja

$$a = \frac{l^2}{\beta\delta^2 - 1}, \quad b = \delta(v_1 + \beta)$$

Los $Q_i(\lambda)$ tienen las siguientes expansiones asintóticas

$$Q_1(\lambda) = l^2\beta - ab^2 + \frac{v_1 a^2 b^2}{\lambda^2} + \frac{O(1)}{\lambda^4}, \quad Q_2(\lambda) = v_1\beta\lambda - \frac{v_1 ab}{\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^3}$$

$$Q_3(\lambda) = \alpha\delta\lambda - \frac{\alpha ab}{\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^3}, \quad Q_4(\lambda) = (v_2\delta^2 - 1)\lambda^2 + \alpha + \frac{O(1)}{\lambda^2}$$

Esto implica que

$$A = \frac{v_2 - v_1}{v_1 d} + \frac{O(1)}{\lambda}, \quad B = \frac{-\alpha\delta}{d\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^2}, \quad C = -\frac{ab(v_2 - v_1)}{lv_1 d\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^2} \quad (5.16)$$

Donde $d = (l^2\beta - ab^2)(v_2\delta^2 - 1) - \alpha$. Ahora, sea $V_n = (\varphi, \psi, \omega, i\lambda\varphi, i\lambda\psi, i\lambda\omega)^T$, donde φ, ψ y ω son dados por (5.10) y (5.16). Es fácil verificar que

$$\|V_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1 \lambda^2 A^2 \int_0^L \sin^2(\delta\lambda x) dx = \rho_1 \lambda^2 A^2 \frac{L}{2} \rightarrow +\infty \text{ cuando } \lambda \rightarrow +\infty$$

Por otro lado, usando (5.1) – (5.6) deducimos que

$$\begin{aligned} \|(i\lambda I - A_2)V_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \max(\rho_1, \rho_2)L + \rho_2\lambda^2 B^2 \int_0^L a_1(x)^2 \cos^2(\delta\lambda x) dx + \\ &\quad + \rho_1\lambda^2 C^2 \int_0^L a_2(x)^2 \cos^2(\delta\lambda x) dx \end{aligned}$$

De (5.16), deducimos que $\|(i\lambda I - A_2)V_n\|_{\mathcal{H}}^2$ esta limitado cuando λ tiende a $+\infty$. La prueba es así completada. ■

Veamos los resultados de tipo polinomial de la tasa de decaimiento.

Teorema 5.2: Si $\frac{gh}{\rho_1} \neq \frac{El}{\rho_2}$, entonces, para cualquier entero positivo $m \geq 1$, existe una constante $C_m > 0$ independiente de U_0 tal que

$$\|S_j(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C_m \left(\frac{\ln t}{t}\right)^m \ln^2 t \|U_0\|_{D(A_j^m)}^2, \quad \forall t > 0 \quad (5.17)$$

para todo dato inicial $U_0 \in D(A_j^m)$, $j = 1, 2$

Prueba:

Por el teorema 2.102, las siguientes condiciones son suficientes para la tasa de decaimiento polinomial de la energía (5.17):

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A_j) \quad (5.18)$$

Y

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2} \|(i\lambda I - A_j)^{-1}\| < +\infty \quad (5.19)$$

La condición (5.18) ha sido verificada en el capítulo 4. Estableceremos la condición (5.19) por contradicción.

Si (5.19) es falso, existe entonces una sucesión $\{\lambda_n\}_n$ en \mathbb{R} y una sucesión $U^n = (\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n) \in D(A_j)$ tal que

$$|\lambda_n| \rightarrow +\infty, \quad \|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1 \quad (5.20)$$

Y

$$\lambda_n^2 (i\lambda_n I - A_j)U^n = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, f_4^n, f_5^n, f_6^n) \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2 \quad (5.21)$$

i.e., en $H^1(0, l)$ tenemos la siguiente convergencia:

$$\lambda_n^2 [i\lambda_n \varphi^n - u^n] = f_1^n \rightarrow 0 \quad (5.22)$$

$$\lambda_n^2 [i\lambda_n \psi^n - v^n] = f_2^n \rightarrow 0 \quad (5.23)$$

$$\lambda_n^2 [i\lambda_n \omega^n - z^n] = f_3^n \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

Y en $L^2(0, L)$ tenemos la siguiente convergencia:

$$\lambda_n^2 \left[i\lambda_n u^n - \frac{Gh}{\rho_1} (\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l\omega_x^n) - \frac{lEh}{\rho_1} (\omega_x^n - l\varphi^n) \right] = f_4^n \rightarrow 0 \quad (5.25)$$

$$\lambda_n^2 \left[i\lambda_n v^n - \frac{EI}{\rho_2} \psi_{xx}^n + \frac{Gh}{\rho_2} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{a_1(x)}{\rho_2} v^n \right] = f_5^n \rightarrow 0 \quad (5.26)$$

$$\lambda_n^2 \left[i\lambda_n z^n - \frac{Eh}{\rho_1} (\omega_{xx}^n - l\varphi_x^n) + \frac{lGh}{\rho_1} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \frac{a_2(x)}{\rho_1} z^n \right] = f_6^n \rightarrow 0 \quad (5.27)$$

Desde el paso 1 en el capítulo 4, podemos ver que la siguiente convergencia es verdadera:

$$\int_0^L (EI|\psi_x^n|^2 + Gh|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n|^2 + Eh|\omega_x^n - l\varphi^n|^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \quad (5.28)$$

A continuación, verificaremos la condición (5.19) encontrando una contradicción con (5.28), i.e., mostraremos que (5.28) tiende a cero. Para mayor claridad, ideamos la prueba en varios pasos.

Paso 1:

Tomando el producto interno de (5.21) con U^n en \mathcal{H}_j , obtenemos

$$Re\{\lambda_n^2 \langle A_j U^n, U^n \rangle\} = \int_0^L \lambda_n^2 (a_1(x)|v^n|^2 + a_2(x)|z^n|^2) dx \rightarrow 0, \quad j = 1, 2 \quad (5.29)$$

De (1.2), obtenemos

$$a_1 \lambda_n v^n, a_2 \lambda_n z^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y } \lambda_n v^n, \lambda_n z^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Theta) \quad (5.30)$$

Entonces, usando (5.30) en (5.23) y (5.24), respectivamente, obtenemos

$$\lambda_n^2 \psi^n, \lambda_n^2 \omega^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Theta) \quad (5.31)$$

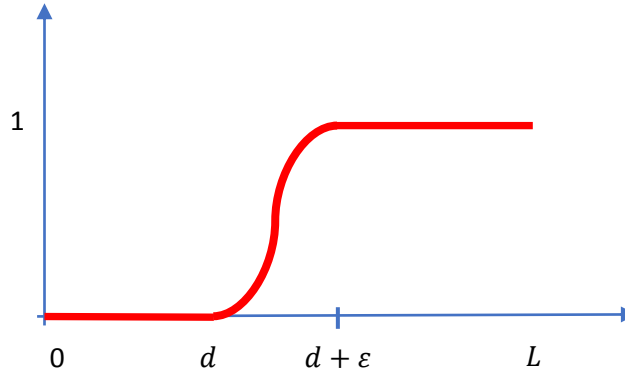
Por otra parte, u^n, v^n y z^n son limitados en $L^2(0, L)$ debido a (5.20). Entonces, dividiendo (5.22) – (5.24) por λ_n^3 , respectivamente, obtenemos

$$\varphi^n, \psi^n, \omega^n \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, L) \quad (5.32)$$

Paso 2:

Definimos la función de corte:

$$\xi \equiv \begin{cases} 1 & \text{en } [d + \varepsilon, L] \\ 0 & \text{en } [0, d] \end{cases}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \text{ en otra parte}$$



Tomando el producto interno de (5.26) por $\xi \bar{\psi}^n$ en $L^2(0, L)$ e integrando por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ i \int_d^L \xi \lambda_n v^n \lambda_n^2 \bar{\psi}^n dx + \frac{EI}{\rho_2} \int_d^L \lambda_n^2 \xi |\psi_x^n|^2 dx - \frac{EI}{\rho_2} [\xi \lambda_n^2 \psi_x^n \bar{\psi}^n]_{x=0}^{x=L} \right. \\ & + \frac{EI}{\rho_2} \int_d^L \xi_x \lambda_n^2 \bar{\psi}^n \psi_x^n dx + \frac{Gh}{\rho_2} \int_d^L (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \xi \lambda_n^2 \bar{\psi}^n dx \\ & \left. + \frac{1}{\rho_2} \int_d^L a_1(x) v^n \xi \lambda_n^2 \bar{\psi}^n dx \right\} = Re \left\{ \int_0^L f_5^n \xi \bar{\psi}^n dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

Primero es fácil ver que el término en el lado derecho de (5.33) tiende a cero. Luego el termino limitado en (5.33) se desvanece debido a la condición de frontera de ψ^n , para $j = 1$, y ψ_x^n , para $j = 2$. Además, ψ_x^n y $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$ son limitados en $L^2(0, L)$ debido a (5.20). Luego usando (5.31) y (5.32) en (5.33), obtenemos

$$\int_{d+\varepsilon}^L |\lambda_n \psi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (5.34)$$

Paso 3:

Considerar el caso $j = 1$. Eliminando v^n en (5.26) por (5.23) y aplicando el producto interno en la ecuación resultante con $\frac{1}{\lambda_n} \chi \bar{\psi}_x^n$ en $L^2(0, L)$, entonces integrando por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^3 \chi_x |\psi^n|^2 dx + \frac{EI}{2\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n \chi_x |\psi_x^n|^2 dx - \frac{EI}{2\rho_2} \lambda_n |\psi_x^n(L)|^2 \right. \\ & + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n \chi (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \bar{\psi}_x^n dx + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n a_1(x) v^n \chi \bar{\psi}_x^n dx \left. \right\} \\ & = \frac{1}{\lambda_n} Re \left\{ \int_{d+\varepsilon}^L f_5^n \chi \bar{\psi}_x^n dx + i \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n f_2^n \chi \bar{\psi}_x^n dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (5.35)$$

Donde χ está definida la función de corte en el Paso 5 del capítulo 4. Entonces usando el Paso 5 del capítulo 4 deducimos que el término en el lado derecho de (5.35) converge a cero. Por otra parte, $(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$ es limitado en $L^2(0, L)$ debido a (5.20), entonces usando (5.30), (5.31) y (5.34) en (5.35) obtenemos

$$\lambda_n |\psi_x^n(L)|^2 \rightarrow 0 \quad (5.36)$$

Tomando nota de que en el caso $j = 2$, tenemos $\psi_x^n(L) = 0$.

Paso 4:

Eliminando v^n en (5.26) por (5.23) luego aplicando el producto interno en la ecuación resultante con $\frac{1}{\lambda_n^2} \chi \overline{\varphi_x^n}$ en $L^2(0, L)$, luego integrando por partes, obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} & Re \left\{ - \int_{d+\varepsilon}^L \lambda_n^2 \chi \psi^n \overline{\varphi_x^n} dx + \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \lambda_n^{-1} \overline{\varphi_{xx}^n} \lambda_n \psi_x^n dx \right. \\ & + \frac{EI}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi_x \overline{\varphi_x^n} \psi_x^n dx - \frac{EI}{\rho_2} [\chi \overline{\varphi_x^n} \psi_x^n]_{x=0}^{x=L} + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \psi^n dx \\ & + \frac{Ghl}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} \omega^n dx + \frac{1}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi \overline{\varphi_x^n} a_1(x) v^n dx \\ & \left. + \frac{Gh}{\rho_2} \int_{d+\varepsilon}^L \chi |\varphi_x^n|^2 dx \right\} = \frac{1}{\lambda_n^2} Re \left\{ \int_0^L f_5^n \chi \overline{\varphi_x^n} dx + i \int_0^L \lambda_n f_2^n \chi \overline{\varphi_x^n} dx \right\} \end{aligned} \right. \quad (5.37)$$

Primero, usando la parte (ii) del Paso 6 del capítulo 4, deducimos que el término en el lado derecho de (5.37) converge a cero. Luego, el término limitado en (5.37) converge a cero en el caso $j = 1$ y desaparece en el caso $j = 2$. Por otra parte, ya que φ^n , ψ_x^n y ω_x^n son limitados en $L^2(0, L)$ debido a (5.20) luego dividiendo (5.25) por λ_n^3 obtenemos esto

$$\lambda_n^{-1} \overline{\varphi_{xx}^n} = i \frac{\rho_1}{Gh} u^n + O(1) \quad (5.38)$$

La ecuación (5.38) es un resultado directo de la división de la ecuación (5.25) por λ_n^3 . Finalmente, ya que φ_x^n es limitado en $L^2(0, L)$ debido a (5.20) luego usando (5.30), (5.31), (5.34) y (5.38) en (5.37), obtenemos

$$\int_{d+2\varepsilon}^L |\varphi_x^n|^2 dx \rightarrow 0 \quad (5.39)$$

Paso 5:

Repitiendo el proceso de los Pasos 7 y 8 del capítulo 4, obtenemos la contradicción con (5.28)

■

CAPITULO 6

Conclusiones

- En el presente trabajo se demostró la estabilidad exponencial del Sistema (1.1) – (1.3) cuando las velocidades de propagación de onda del desplazamiento vertical v_1 y del ángulo de rotación v_2 son iguales, y si dichas velocidades son distintas no hay estabilidad exponencial, pero existe una estabilidad polinomial sobre el espacio de fase.
- La Teoría de Semigrupos es una gran herramienta matemática para demostrar la estabilidad exponencial y polinomial, y mejorada gracias a los trabajos de Pruss y Liu.
- En este trabajo se utilizó un sistema de Bresse de tres ecuaciones de onda con dos términos disipativos sobre las ecuaciones de onda del ángulo rotación y del desplazamiento longitudinal respectivamente, demostramos la existencia y la unicidad mediante el teorema de Lummer – Phillips, luego se probó la estabilidad exponencial mediante el teorema de Prüss y la estabilidad polinomial se verificó con el teorema de Liu.
- La contribución de este trabajo fue la utilidad de los términos de amortiguamiento en dos ecuaciones (de tres) del sistema de ecuaciones diferenciales parciales, con condiciones sobre la igualdad o diferencia entre las velocidades del desplazamiento vertical y del ángulo de rotación, para obtener la estabilidad exponencial o la estabilidad polinomial respectivamente.
- Otra contribución, que es justamente lo que la matemática realiza en otras áreas como una poderosa herramienta, es la utilización de estos resultados de estabilidad para mejorar o alterar las constantes positivas $\rho_1, \rho_2, G, h, l, E$, que caracterizan las propiedades físicas de la viga y el filamento del sistema de Bresse (1.1) – (1.3), que se aplican, por ejemplo, en Mecánica de Materiales para mezclar elementos de distinta naturaleza.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg; Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, *Comm. Pure Appl. Math*, 17, 35-92, 1964.
- [2] Alabau-Boussouira, F.; Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, *SIAM J. Control Optim.* **41**, 511 – 2002.
- [3] Alabau, F., Cannarsa, P., and Komornik, V.; Indirect internal stabilization of weakly coupled systems, *J. Evol. Equ.* **2**, 127 - 2002.
- [4] Alabau-Boussouira, F.; Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control, *Nonlinear Differential Equations and Applications* **14**, 643 - 2007.
- [5] Ali Wehbe and Wael Youssef; Exponential and polynomial stability of and elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks, *Journal Math Physics* 51, 103, 523 (2010).
- [6] Benchimol, C. D., “A note on weak stabilizability of contraction semigroups,” *SIAM J. Control Optim.* **16**, 373 - 1978.
- [7] A. Borichev and Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, *Math. Ann.*, 347 (2009), pp. 455-478.
- [8] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [10] M. Cavalcanti and V. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, UEM / DMA, 2010.
- [11] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun, Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping, *SIAM J. Appl. Math.*, 51 (1991), pp. 266-301.
- [12] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc (1961). New York.
- [13] L. Gearhart, Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces, *Trans. AMS* 236, 385 - 394, 1978.
- [14] C. W. Groetsch, *Elements of Applicable Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.
- [15] F. L. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, *Ann. Differential Equations*, 1 (1985), pp. 43-56.
- [16] V. Komornik and E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 69 (1990), pp. 33-54.

- [17] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation, *SIAM J. Control Optim.*, 29 (1991), pp. 197-208.
- [18] S. Krenk, Energy conservation in Newmark based time integration algorithms, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 (2006), pp. 6110-6124.
- [19] E. Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, Jhon Wiley e Sons, 1978.
- [20] K. Liu and Z. Liu, Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping, *SIAM J. Control Optim.*, 36 (1998), pp. 1086-1098.
- [21] W. Liu and G. Williams, The exponential stability of the problem of transmission of the wave equation, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 57 (1998), pp. 305-327.
- [22] Z. Liu and B. Rao, Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, *Z. Angew Math. Phys.*, 56 (2005), pp. 630-644.
- [23] Z. Liu and S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems, In *CRC Research Notes in Mathematics* 398. Chapman and Hall. (1999).
- [24] L.F.Ho, Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control, *SIAM J. Control Optim.*, 28 (1990), pp. 733-748.
- [25] A. Medeiros and M. Miranda, *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogeneos)*, UFRJ / IM, 2011.
- [26] A. Medeiros; *Comportamento Assintótico de Sistemas de Bresse com Dissipação Friccional e Dissipação na Fronteira*. Vicoso / Minas Gerais, Brasil (2015), pp. 22-24.
- [27] A. Moreira Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, UFRJ / IM, 2012.
- [28] J. Muñoz Rivera, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.
- [29] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, *Israel J. Math.*, 95 (1996), pp. 25-42.
- [30] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, *Math. Ann.*, 305 (1996), pp. 403-417.
- [31] N. M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE 85 (1959).
- [32] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag (1983). New York.
- [33] J. Pruss, On the spectrum of C_0 -semigroups, *Trans. AMS.* 284 (1984), pp. 847-857.
- [34] R. Quintanilla, Exponential decay in mixtures with localized dissipative term, *Appl. Math. Lett.*, 18 (2005), pp. 1381-1388.

- [35] M. Renardy, On the type of certain C_0 -semigroups, *Comm. Partial Differential Equations*, 18 (1993), pp. 1299-1309.
- [36] Xu, G.-Q. and Yung, S. P., "Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls," *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **9**, 579 - 2003.
- [37] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [38] Muñoz Rivera, J. and Racke, R. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl.* 276 (2002), 248–278.
- [39] Soufyane, A. and Wehbe, A., Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, *J. Differ. Equations*, Vol. 2003(3003) , N° 29, pag. 1-14, (2003).